OPERE

DI

FRANCESCO MARIA CAVAZZONI ZANOTTI.



TOMO SECONDO.



IN BOLOGNA
NELLA STAMPERIA DI SAN TOMMASO D' AQUINO



MDCCLXXXI.
CON *APPROVAZIONE.*

LO STAMPATORE
A CHI LEGGE.

ECco Lettor cortese, il secondo volume delle opere del celebre Francesco Maria Zanotti. In esso troverai raccolte varie operette Matematiche, altre fino ad ora inedite, altre già date alla pubblica luce a Parigi, a Venezia, a Bologna. Non ti prenda meraviglia, se incontrerai fra queste anche una dissertazione sulla separazione delle indeterminate stampata già nel terzo tomo dei Commentarj dell' Instituto; nè credere perciò, che a multiplicare i volumi della presente edizione si voglia ora ristampar tutto quello, che è stato scritto dal Zanotti in quei Commentarj. Dal che oltre molte altre ragioni, dee distoglierne pur anche l' esempio dei raccoglitori delle opere di Fontenelle, i quali non diedero luogo nella loro edizione alla Storia dell' Accademia di Parigi. Per la qual cosa nel pubblicare di nuovo quella dissertazione si è inteso unicamente di dare un breve saggio della nitida, ed elegante maniera, colla quale il Zanotti sapea trattare gli argomenti più intralciati, ed oscuri. Ben mi lusingo, che tu, cortese Lettore, vorrai avere a grado un tale intendimento diretto al tuo piacere, e profitto; e vivi felice.

INDICE

Di quanto ſi contiene in queſto ſecondo Volume.



ALGORITHMUS

IN EPITOMAM

REDACTUS.

AD NOBILISSIMUM

Atque optimum Adolescentem

FRANCISCUM RATTAM.

NIhil mihi accidere jucundius potuit, suavissime Ratta atque optime, quam quod audivi: te in multis honestissimarum, pulcherrimarumque rerum studiis quotidie versari, & inter hæc geometriæ esse cupidum. Quippe hæc una ad acuenda ingenia, conformandosque ad reliquas facultates animos jure censetur aptissima. Atqui interdum vereor (in quo cognosces amorem meum), ne te forte cum tam multis distinearis, ingenio magis, quam otio abundantem, hujus longitudo studii deterreat. Volui ergo me tibi socium præbere, vel potius, ut aliquid ætati meæ dem, adjutorem; cumque te primum iam tertiumque Euclidis librum perlegisse cognoverim, epitomam nescio quam scripsi, qua te ad algorithmum introducerem; ac ne

ad Euclidem; cujus ratio longior videtur multis atque implicatior, redire opus habeas, sermones adjunxi duos quam brevissimos, unum de proportionibus, alterum de magnitudinibus, quæ in geometria considerari solent, per litteras exprimendis. Speravi enim fore, ut hanc viam tenens neque labore te opprimas, & progressus facias celeriores. In quo si erravero, quamquam ne id metuam, multorum maximorumque hominum facit auctoritas, tamen, si quid erravero, non me pænitebit ex eo, quo te prosequor, amore longe maximo erravisse. Sed jam ad rem venio, exordium hinc capiens.

Quantitas quævis quavis littera *a*, *b*, *c* &c. exprimi solet. Quod si litteræ præfixum sit signum +, censetur quantitas poni, & positiva dicitur; si signum —, negari & tolli, & dicitur negativa. Quare $+a$, $+c$, $+b$ quantitates positivæ sunt; $-a$, $-b$, $-u$ negativæ.

Si cui litteræ signum nullum præfixum sit, censetur præfixum +.

De additione & subtractione.

SI cui quantitati alteram velis addere, hanc illi adjunges, signum nihil mutans; si subtrahere, seu demere, signum ei mutabis, quam subtrahis. Ita, si quantitati a velis addere $+b$, scribes $a+b$; si $+c$, scribes $a+c$; si $-d$, scribes $a-d$; si subtrahere, scribes $a-b$, $a-c$, $a+d$.

Quod additione fit, dicitur quantitatum summa; quod, facta subtractione, remanet, differentia.

Hic iam, si expressionis forma spectetur, quantitates omnes in duo genera dispertiuntur; aliæque simplices dicuntur, aliæ compositæ. Simplices sunt, quæ præter signum præfixum, seu quod præfixum, censetur, signum nullum aliud habent, uti a, b, $-c$ &c. Compositæ sunt, quæ signum aliquod habent litteris interiectum, uti $a+b$, $c-d$ &c.

Compositæ non secus adduntur & subtrahuntur, ac simplices. Ita si quantitati $a+b$ velis addere $c+d$, scribes $a+b+c+d$, signa nihil mutans; si subtrahere, mutabis signa in ea quantitate, quam subtrahis. Scribes ergo $a+b-c-d$.

De expurgatione quantitatum compositarum.

QUuantitas omnis composita terminis constat, quorum quisque præfixo signo notatur. Ita quantitas $a+b-c+d$ terminis constat a, cui prefixum censetur signum $+$, $+b$, $-c$, $+d$. Ad expressionis, scri-

ſcriptioniſque brevitatem duo caveri ſolent, in quibus quantitatis expurgatio conſiſtit.

Primum. Si idem terminus plus quam ſemel occurrat, ſemel ſcribendus eſt, præfixo numero, qui oſtendat, quoties ſcribendus fuiſſet. Ita ſi occurrat quantitas $a+b+b+c+b+a$; hanc ſic exſcribes $2a+3b+c$.

Secundo. Si duo termini cetera iidem plane ſint, atque hoc tantum differant, quod alter præfixum habet ſignum $+$, alter $-$; ii elidi inter ſe dicuntur, abiiciunturque ambo, quaſi nulli ſint. Quare ſi occurrat quantitas $a-b+c+b$, hanc ſic exſcribes $a+c$, abiectis terminis $+b$, $-b$.

De multiplicatione.

Quantitatem alteram per alteram multiplicare nihil eſt aliud, niſi illam toties ſumere, quot ſunt hujus elementa.

Numeri elementa unitates ponuntur. Quo ſtatim intelligis, quantitatem quamvis multiplicari poſſe per quemvis numerum, ideſt toties ſumi, quot ſunt unitates in numero; eumque, qui ponit $3a$, $4b$, multiplicare a per 3, b per 4. Neque vero quantitas ulla eſt, quin conſiderari poſſit tamquam multiplicata per 1.

Quod multiplicando fit, dicitur factum, ſeu productum, ſive etiam rectangulum duarum illarum quantitatum, quæ in multiplicationem veniunt. Hæ vero

ro dicuntur factores, seu multiplicatores, sive etiam producti latera. Ita numerus 15 dicetur factum, seu productum, sive rectangulum numerorum 3, & 5, quoniam multiplicando 3 per 5 fit 15. Numeri ipsi 3, & 5 dicuntur factores, seu multiplicatores, sive latera numeri 15.

Quantitas, quæ per alteram multiplicatur, in communi mathematicorum sermone dicitur in eam duci. Ubi ergo dixero *a* ductam in *c*, intelligo *a* multiplicatam per *c*. Atque hæc quidem ad usum loquendi spectant.

Illud ad rem pertinet. Utrovis modo multiplicaveris, sive *a* per *b*, sive *b* per *a*, idem productum fiet. Quod in exemplo numerorum 3 & 5 satis apparet; fit enim 15, sive 3 per 5 multiplices, sive 5 per 3. Sed iam multiplicandi modum explicemus.

De modo multiplicandi.

Hic & simplicium quantitatum & compositarum ratio est habenda. Dicamus primum de simplicibus.

Si quantitates duas simplices, uti *a* & *b*, multiplicare inter se velis, eas deinceps scribes nullo interiecto signo, uti *ab*; quo quidem exprimes non *a*, neque *b*, sed productum illud, quod fit multiplicando *a* per *b*.

Erit autem productum *ab* positivum, eique præfiges signum +, si quantitates, quas multiplicas, *a* & *b*, vel ambæ positivæ sint, vel ambæ negativæ.

Quod

Quod si altera positiva fuerit, negativa altera, productum ab negativum erit, eique prefigis signum —. Si ergo multiplicare velis $+a$ per $+b$, sive $-a$ $-b$, productum pones $+ab$; si $+a$ per $-b$, sive $-a$ per $+b$, productum pones $-ab$. Neque mirari oportet, quod $-a$ ducta in $-b$ productum efficiat positivum; quippe, negativa ipsa cum sit, si negative sumatur, positiva evadat necesse est.

Neque illud prætereundum. Si quantitates multiplicandæ numeros præfixos habeant, producto litterarum præponendum erit productum numerorum, ac tum demum signum præfigendum. Quare si multiplicare oporteat $3a$ per $2b$, productum pones $6ab$, si $3a$ per $-4b$, productum pones $-12ab$.

Producta hæc, e multiplicatione quantitatum simplicium orta, sunt & ipsa, uti manifestum est, quantitates simplices; nec secus quam aliæ simplices, adduntur, subtrahunturve. Multiplicantur etiam eodem modo. Quare si multiplicandum tibi sit ab per c, pones abc; si per $-cb$, pones $-abcb$. Adhuc de multiplicatione quantitatum simplicium.

Compositarum brevior est ratio. Multiplicatur enim quantitas quævis composita per quamvis aliam, si singuli unius termini in omnes alterius terminos ducantur, ac producta omnia in summam colligantur. Multiplicando igitur $ab+cb$ per $c-d$, pones $abc+ccb-abd-cdb$.

Quamquam pro multiplicatis habentur duæ quantitates compositæ, puta $ab+cb$, & $c-d$, etiamsi sic

ſic ſcribantur $\overline{ab+cb} \times \overline{c-d}$, ſive $\overline{ab+cb}\,.\,\overline{c-d}$.
Quæ ſcriptio aliquando eſt ad uſum commodior.

De poteſtatibus.

SI quantitas quæpiam, puta a, multiplicanda ſit per ſe ipſam, ideſt per a; ex his, quæ hactenus diximus, ſcribendum erit aa. Ac ſi hoc ipſum aa multiplicandum ſit rurſum per a, ſcribendum erit aaa. Ac ſi hoc ipſum aaa rurſum per a, ſcribendum erit $aaaa$. Ejuſque progreſſus nullus eſt finis.

Ad vitandum ergo faſtidium ſcribendi, pronunciandique tam ſæpe eamdem litteram a, mos invaluit, ut pro aa ſcribatur a^2; pro aaa ſcribatur a^3; pro $aaaa$ ſcribatur a^4 &c. Hinc ſeries efficitur, cui, ne quid ad elegantiam deſit, initium ponunt a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, a^8 &c.

Termini a^1, a^2, a^3 &c. dicuntur poteſtates quantitatis a. Numeri, qui ſupra exſtant ad dexteram, dicuntur exponentes, ſive indices poteſtatum. a^1 dicitur poteſtas prima, & æque valet, ut a; a^2 dicitur poteſtas ſecunda, ſeu quadratum quantitatis a; a^3 poteſtas tertia, ſeu cubus; a^4 poteſtas quarta; a^5 poteſtas quinta &c.

Hinc breviſſima multiplicandarum poteſtatum ratio orta eſt. Etenim ſi duæ ejuſdem quantitatis poteſtates, puta a^2 & a^3, multiplicandæ inter ſe ſint, id fiet ſcribendo ſemel litteram a, eique adjungendo, exponentis loco, ſummam duorum exponentium 2,

& 3. Hæc quippe ostendet, quam sæpe sit littera *a* in multiplicatione illa repetenda. Si ergo multiplices a^2 per a^3, scribes a^5; si a^3 per a^4, scribes a^7; si a^1 per a^6, scribes a^7 &c.

Hæc adhuc de multiplicatione; quæ tibi volo in promptu esse, quo sis ad ea, quæ sequuntur, expeditior.

De divisione.

Dividere quantitatem quamvis *a* per quamvis *b* est invenire, quoties *b* ingrediatur in *a*. Dicitur *b* divisor; *a* dividendum, Numerus, seu quantitas, quæ ostendit, quoties *b* ingrediatur in *a*, dicitur quotiens. Dividatur 15 per 3; erit 15 dividendum; 3 divisor; quotiens vero erit 5; nam 3 ingreditur in 15 quinquies. Hinc patet, quotientem, si ducatur in divisorem, æqualem fieri dividendo.

Divisio sic peragitur. Infra dividendum divisor ponitur, lineola interjecta. Ad dividendum ergo *a* per *b* scribes $\frac{a}{b}$. Qua quidem scriptione intelligi debet non *a*, neque *b*, sed quotiens ille, qui oritur dividendo *a* per *b*.

Quotiens sic expressus, uti $\frac{a}{b}$, dicitur quantitas fracta, seu fractio. Quantitates aliæ *a*, *b*, *c d* &c., de quibus adhuc diximus, dicuntur integræ. Dividendum *a*, quod supra ponitur, vulgo numerator dicitur; divisor *b*, qui infra, denominator. Illud ergo

go tritum eſt: quotiens, ductus in denominatorem, efficit numeratorem, ideſt numeratori æqualis eſt.

Quare ſi in fractione cum numerator, tum denominator eodem ſigno affecti ſint, uti in his $\frac{+a}{+b}$, $\frac{-a}{-b}$; quotiens poſitivus ſit oportet; nam negativus ſi eſſet, neque ductus in denominatorem $+b$ efficere poſſet numeratorem $+a$; neque ductus in denominatorem $-b$ efficere poſſet numeratorem $-a$. Pari de cauſa erit quotiens negativus, ſi a & b in fractione ſigna habeant diverſa, puta $\frac{+a}{-b}$, $\frac{-a}{+b}$. His ſane liquet, fractiones $\frac{+a}{+b}$, & $\frac{-a}{-b}$, ſi res ipſa ſpectetur, nihil inter ſe differre; idem eſt enim utriuſque quotiens. Nihilque pariter differunt $\frac{+a}{-b}$, & $\frac{-a}{+b}$.

Ac iam novum, ſi exprimendi ratio attendatur, quantitatum genus occurrit, ideſt fractionum; in quo rurſum, quemadmodum additio, ſubtractio, multiplicatio, atque adeo diviſio ipſa peragendæ ſint, videndum. Quod ſtatim exſequar, ſi conſectariola prius paucula propoſuero. Sed ante moneo ſigno $=$ inter duas quantitates interpoſito ſignificari, eas quantitates pro æqualibus poni. Quare ſi ſcriptum inveneris $a+b=c$, intelliges quantitates duas $a+b$, & c haberi pro æqualibus; ſi $\frac{a}{b}=u$, intelliges fractionem $\frac{a}{b}$ æqualem poni quantitati u. Sed jam conſectariola, quæ dixi, exponamus. CON-

CONSECTARIOLUM I.

Si quantitas quævis a ponatur divisa per 1, sic $\frac{a}{1}$, quotiens erit ipsa a; namque ipsa a ducta in denominatorem 1, efficit numeratorem a. Quare nulla est quantitas, quæ haberi non possit, tamquam fractio, cujus denominator sit 1.

Si ponatur a divisa per 2, sic $\frac{a}{2}$; erit quotiens pars dimidia quantitatis a; hæc quippe bis sumpta, idest ducta in denominatorem 2, facit numeratorem a, Pari modo erit $\frac{a}{3}$ pars tertia; $\frac{a}{4}$ pars quarta &c.

CONSECTARIOLUM II.

Si numerator fractionis per quantitatem quamlibet multiplicetur, per eamdem multiplicabitur et quotiens. Exempli gratia. Sit fractio $\frac{a}{b}$; ejusque quotientem fac esse q. Si multiplicaveris numeratorem a per t, ut fractio evadat $\frac{at}{b}$, multiplicabitur quoque q per t, eritque qt quotiens fractionis $\frac{at}{b}$. Quod sic ostendo.

Cum q sit quotiens fractionis $\frac{a}{b}$, erit $bq=a$; ergo $bqt=at$; ergo qt, ductus in denominatorem b, æqualis est numeratori at; est igitur qt quotiens

tiens fractionis $\frac{a\,t}{b}$. Quod erat ostendendum.

Quotiens igitur, seu potius fractio ipsa (quid enim est aliud fractio ipsa nisi quotiens?) per quantitatem quamlibet multiplicabitur, si modo numerator tantum fractionis per eam multiplicetur. Quamquam de fractionum multiplicatione alius erit dicendi locus.

CONSECTARIOLUM III.

Si in fractione cum numerator, tum denominator per eamdem quantitatem multiplicentur, quotiens idem manet. Exempli gratia sit fractio $\frac{a}{b}$: ejus quotientem fac esse q. Si multiplicaveris cum numeratorem a, tum denominatorem b per t, ut fractio evadat $\frac{a\,t}{b\,t}$; erit adhuc q quotiens fractionis $\frac{a\,t}{b\,t}$. Quod sic ostendo.

Cum q sit quotiens fractionis $\frac{a}{b}$, erit $b\,q = a$; ergo $b\,q\,t = a\,t$. Igitur q ductus in denominatorem $b\,t$ æqualis est numeratori $a\,t$: ergo q est quotiens fractionis $\frac{a\,t}{b\,t}$. Quod erat ostendendum.

Tibi ergo idem erit $\frac{a}{b}$, quod $\frac{a\,t}{b\,t}$; idem enim est quotiens; idemque erit $\frac{c}{d}$, quod $\frac{c\,u}{d\,u}$; idemque $\frac{a\,t}{t}$, quod $\frac{a}{1}$, idest a.

Hinc

Hinc artificium ductum est, vulgo notissimum; reducendi fractiones ad eumdem denominarorem. Habeant fractiones duæ denominatores diversos, uti $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$: si in utraque fractione tum numeratorem, tum denominatorem multiplicaveris per denominatorem fractionis alterius, illas scilicet in has convertes: $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, quæ sane ab illis nihil differunt, habentque ambæ eumdem denominatorem bd. Sic dicuntur fractiones ad eamdem denominationem reduci.

Sed iam quo modo in addendo, subtrahendo, multiplicando, atque etiam dividendo fractio quæque tractari debeat, sive cum fractione altera proponatur, sive cum quantitate integra, videamus. Quamquam de integris minus est laborandum; nulla est enim quantitas integra, quin per 1 possit dividi, tractarique tamquam fractio. Ubi ergo de quantitatibus fractis exposuero, nihil te integræ morabuntur.

De additione & subtractione fractionum.

FRactio fractioni addi potest, vel subtrahi duobus modis. Primum si alteram adscribas alteri, de signis nihil mutans, si vis addere; si subtrahere, signum mutans vel numeratoris, vel denominatoris in ea fractione, quam subtrahis. Igitur fractioni $\frac{a}{b}$ addes fra-

ctionem $\frac{c}{d}$, scribens $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$; subtrahes scribens $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$, sive $\frac{a}{b}+\frac{c}{-d}$.

Modum alterum sic explico. Fractiones propositæ vel habent ambæ eumdem denominatorem, vel non. Habeant primum eumdem, uti $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{b}$. Si hanc illi vis addere, numeratorem numeratori adde, ac summam divide per b, sic $\frac{a+c}{b}$; si subtrahere, numeratorem numeratori subtrahe, ac differentiam divide per b, sic $\frac{a-c}{b}$.

Quod si fractiones propositæ diversos habeant denominatores, uti $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$; eas prius ad eamdem denominationem reduces, tum ea, quam modo dixi, ratione addes, vel subtrahes.

De multiplicatione fractionum.

FRactionem per fractionem multiplicabis, si pones productum numeratorum divisum per productum denominatorum, verbi gratia $\frac{a}{b}$ per $\frac{c}{d}$, si pones $\frac{ac}{bd}$; cujus præceptionis hæc ratio est.

Fac quotientem fractionis $\frac{a}{b}$ esse q; fractionis $\frac{c}{d}$ esse t. Illam per hanc muitiplicare nihil aliud erit, nisi

nisi multiplicare q per t, idest ponere qt. Atqui hoc ipsum ponis ponens fractionem $\frac{ac}{bd}$; siquidem fractionis hujus $\frac{ac}{bd}$ quotiens est ipse qt. Quod sic ostendo.

Si est q quotiens fractiones $\frac{a}{b}$, erit $bq=a$. Si est t quotiens fractionis $\frac{c}{d}$, erit $dt=c$. Ergo erit $bqdt=ac$. Igitur qt ductus in denominatorem bd æqualis est numeratori ac. Est ergo qt quotiens fractionis $\frac{ac}{bd}$. Quod erat ostendendum.

De divisione fractionum.

Quod in uno exemplo proponam, valebit in omnibus. Dividenda sit fractio $\frac{a}{b}$ per fractionem $\frac{c}{d}$. Multiplica numeratorem illius a per denominatorem hujus d; ac rursum denominatorem illius b per hujus numeratorem c, ponens $\frac{ad}{bc}$. Confecta erit divisio. Cujus præceptionis hæc ratio est.

Fac quotientem fractionis $\frac{a}{b}$ esse q; fractionis $\frac{c}{d}$ esse t. Illam per hanc dividere nihil aliud erit, nisi dividere q per t, idest ponere $\frac{q}{t}$. Atqui hoc ipsum ponis ponens fractionem $\frac{ad}{bc}$; siquidem hujus fractionis $\frac{ad}{bc}$ quotiens est $\frac{q}{t}$. Quod sic ostendo.

Si est

Si eſt q quotiens fractionis $\frac{a}{b}$, erit $bq=a$. Si eſt t quotiens fractionis $\frac{c}{d}$, erit $dt=c$. Ergo erit $adt=cbq$; ac dividendo utramque partem per t erit $ad=\frac{cbq}{t}$. Igitur $\frac{q}{t}$ ductus in denominatorem bc efficit numeratorem ad; ideoque eſt quotiens fractionis $\frac{ad}{bc}$. Quod erat oſtendendum.

De radicibus.

Explicatis fractionibus reſtat, ut de radicibus pauca dicamus. Unaquæque quantitas in ſe ducta aliam efficit. Hæc illius quadratum; illa hujus radix, ſeu radix ſecunda dicitur. Numerus 3 ductus in 3, efficit 9. Eſt ergo 9 quadratum numeri 3; numerus ipſe 3 radix, ſeu radix ſecunda numeri 9

Quod ſi numerus 9 ducatur rurſum in 3, quo fiet 27, dicitur 3 radix tertia numeri 27. Ac ſi hic ipſe numerus 27 ducatur rurſum in 3, quo fiet 81, dicetur 3 radix quarta numeri 81.

Hoc modo ad quintam radicem procedi poteſt, ad ſextam, ad alias atque alias. Hic de ſecundis tantum agam; namque in primis exercitatiunculis hæ fere ſolæ occurrunt; ac multum tibi proderit in his te paullulum exercuiſſe, antequam ad alias accedas.

Expreſſa quantitate quapiam per litteras ſæpe quæritur ejus radix; eaque interdum ſe prodit arti-

 ficio

ficio nullo. Quantitatis $a a$ nemo non videt radicem esse a; quantitatis $a a b b$ esse $a b$; fractionis $\frac{a a}{b b}$ esse $\frac{a}{b}$. At sæpe accidit, ut nullo modo se prodat; ac tum exprimitur, scribendo quantitatem ipsam, eique imponendo signum $\surd$, quod signum radicale appellatur. Quare $\sqrt{a}$ exprimit radicem quantitatis a; $\sqrt{a+t}$ radicem quantitatis $a+t$; $\sqrt{\frac{a}{u}}$ radicem fractionis $\frac{a}{u}$.

Hic illud animadvertas velim. Cujuslibet quantitatis radix (secunda quidem, nam de secundis tantum loquimur) sumi potest vel positive præfixo signo $+$, vel negative præfixo signo $-$; utrovis enim modo sumatur, in se ducta idem facit; namque pariter & a, & $-a$, in se ducta, facit $a a$.

Quare etiam radicibus per radicale signum expressis & $+$ præfigi potest, & $-$, ad hunc modum $+\sqrt{a}$, & $-\sqrt{a}$.

Posthac radicem cum dixero, eam intellige, quæ radicali signo expressa sit.

De radicibus tractandis.

HIc iam, si exprimendi ratio spectetur, novum oritur quantitatum genus, idest radicum. Quæ quo modo tractentur, non longum est dicere; sic enim tractantur, uti quantitates simplices. Quare & cuivis

vis quantitati a addes $\sqrt{b}$, ſcribendo $a+\sqrt{b}$; & ſubtrahes, ſcribendo $a-\sqrt{b}$. Neque minus id facies, ſi radix radici, puta radix a radici b, addenda ſit, vel ſubtrahenda; ſcribes enim $\sqrt{b}+\sqrt{a}$, $\sqrt{b}-\sqrt{a}$. Sic radices quantitates illas, quæ ſimplices dicuntur, per omnia imitantur; quamquam habent alium quoque multiplicationis, diviſioniſque modum, de quo ſeparatim eſt dicendum.

Atque hic illud præſtat animadvertere radicem quamlibet in ſe duci, ejuſque quadratum fieri, radicali tantum ſigno ſublato. Itaque $\sqrt{q}$ in ſe ducitur, ejuſque quadratum fit, ponendo q; ac fit qnadratum $\sqrt{t+u}$, ponendo $t+u$. Quod ipſum per ſe eſt manifeſtum.

De radicum multiplicatione.

SIt radix quævis, puta $\sqrt{q}$, multiplicanda per quantitatem quamvis t, ſive etiam $\sqrt{t}$. Præter quamquod multiplicare eas potes, tamquam ſint quantitates ſimplices, ac producta ſic ponere: $t\sqrt{q}$, $\sqrt{q}\sqrt{t}$; eſt etiam alia multiplicandi ratio, quæ generali hoc theoremate nititur.

Propoſitis duabus quantitatibus, quæcumque fuerint, a, & b; ſi illarum quadrata aa, & bb ſimul multiplicaveris, quo ſiet $aabb$; tum hujus producti radicem poſueris; erit hæc radix æqualis producto ipſarum a & b, nempe producto ab. Et ſane radix producti $aabb$ eſt ab.

Propofitis ergo $\sqrt{q}$ & t, has etiam multjplicare hoc modo poteris. Ambarum quadrata q & tt fimul multiplica, quo fiet qtt. Tum hujus producti radicem pone $\sqrt{qtt}$; erit fcilicet hæc radix æqualis producto $t\sqrt{q}$.

Propofitis fimiliter $\sqrt{q}$ & $\sqrt{t}$; harum quadrata q, & t fimul multiplica; ac producti qt radicem pone $\sqrt{qt}$. Erit hæc radix æqualis producto $\sqrt{q}\sqrt{t}$.

Ex hac multiplicandi ratione duo commoda proficifcuntur. Primum litteras omnes, fi voles, fub radicale fignum coniicies: deinde radicalia duo figna ad unum rediges.

De radicum divifione.

Sit radix quævis, puta $\sqrt{q}$, dividenda per quantitatem quamvis t, vel fit t dividenda per $\sqrt{q}$, vel etiam $\sqrt{q}$ per $\sqrt{t}$; præterquam quod dividere eas potes, tamquam quantitates fint fimplices, ac ponere $\frac{\sqrt{q}}{t}$, $\frac{t}{\sqrt{q}}$, $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{t}}$; eft etiam alia dividendi ratio, quæ hoc theoremate nititur.

Dividenda fit quantitas quævis a per quamvis b. Illius quadratum aa divide per hujus quadratum bb, ponens $\frac{aa}{bb}$; tum hujus fractionis $\frac{aa}{bb}$ radicem fume; erit hæc radix æqualis fractioni $\frac{a}{b}$.

Sit ergo tibi dividenda $\sqrt{q}$ per t. Illius quadratum

tum q divide per hujus quadratum tt, ponens $\frac{q}{tt}$. Erit $\sqrt{\frac{q}{tt}}$ æqualis fractioni $\frac{\sqrt{q}}{t}$.

Sit rursum dividenda t per $\sqrt{q}$. Illius quadratum tt divide per hujus quadratum q, ponens $\frac{tt}{q}$. Erit. $\sqrt{\frac{tt}{q}}$ æqualis fractioni $\frac{t}{\sqrt{q}}$.

Sit dividenda $\sqrt{q}$ per $\sqrt{t}$. Illius quadratum q divide per hujus quadratum t, ponens $\frac{q}{t}$. Erit $\sqrt{\frac{q}{t}}$ æqualis fractioni $\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{t}}$.

Hoc modo & litteras omnes, si voles, sub radicale signum coniicies, & radicalia duo signa in unum colliges. Quæ duo quidem sunt commodissima.

Hæc fere sunt, mi Ratta suavissime, quæ te in præsens scire volo; nam quæ abditiora sunt, explanationemque postulant longiorem, ea partim ex usu, ac per te ipse intelliges, partim e scriptoribus petes, qui ista fusius tractaverunt; ad quos tamen accedas nolim, nisi te prius in his, quæ adhuc tradidi, aliquandiu exercueris. Id quod perutiliter, ut spero, & magna cum voluptate facies; si iis perlectis, quæ mox de proportionibus, ac de magnitudinibus per litteras exprimendis breviter, & summatim differam, ad theoremata demonstranda te conferes. In quibus ubi satis diu versatus fueris, tum vero auctor tibi sum, ut ad algorithmi studium rursum te referas, & quæ prætermissa a nobis sunt,

suis

ſuis quæque locis adiungas. Eritque id laboris ſane perexigui; quæ enim ante perceperis, ſua ipſa ſponte in memoriam redibunt; & quæ nova erunt, faciliora multo videbuntur, quam ſi fuiſſent ab initio propoſita. Itaque algorithmos iſtos, qui vulgo circumferuntur, quique omnia ſtatim congerunt, ut dicam quod ſentio, non ſatis probo; videntur enim obruendis ingeniis juvenum, quam informandis aptiores. Sed iam de proportionibus, quod ante pollicitus ſum, tradamus.

De Proportionibus.

PRoportio eſt reſpectus, quem habet quantitas ad quantitatem pro eo ut illam plus minuſve continet. Numerus 10 bis continet numerum 5. Numerus 6 ter continet numerum 2. Numerus 7 bis continet numerum 3, & præterea unam ejus tertiam partem. Hi omnes continendi modi proportiones dicuntur.

Proportio dicitur etiam ratio. Quantitas, quæ conſideratur ut continens, & primo loco poni ſolet, dicitur antecedens; altera conſequens; ambæ termini rationis.

Dicitur ratio major minorve pro eo ut antecedens plus minuſve conſequentem continet. Si bis continet, ratio dicitur dupla; ſi ter, tripla; ſi quater, quadrupla &c. Si antecedens dimidiam tantum conſequentis partem continet, ratio dicitur ſubdupla; ſi tertiam, ſubtripla; ſi quartam, ſubquadrupla &c. Si

Si rationes plures propositæ fuerint, verbi gratia: a ad b, c ad d, e ad f, ratio illa, quam habet productum omnium antecedentium ace ad productum omnium consequentium bdf, dicitur composita ex rationibus illis omnibus, a ad b, c ad d, e ad f.

Si propositæ rationes sint tantum duæ, eæque inter se æquales, ut si quis proposuerit a ad b, ac rursum a ad b; ratio composita, quæ erit utique aa ad bb, dicetur duplicata rationis a ad b. Quo intelligis, rationem duplicatam rationis a ad b nihil esse aliud, nisi rationem illam, quam habet quadratum aa ad quadratum bb.

Quod si propositæ rationes tres fuerint, eæque inter se æquales, ut si quis proposuerit a ad b, tum rursum a ad b, tum tertio a ad b; ratio composita, quæ sane erit a^3 ad b^3, dicetur triplicata rationis a ad b. Quo intelligis, rationem triplicatam rationis a ad b nihil esse aliud, nisi rationem illam, quam habet cubus a^3 ad cubum b^3.

Antequam ultra progredior, unum præstat animadvertere: si quantitates duæ b, c æquales fuerint, eamdem utraque proportionem habebit ad tertiam quamvis a; ac tertia quævis a eamdem habebit proportionem ad utramque. Et vicissim, si tertia quævis a eamdem habuerit proportionem ad utramque b, & c; sive utraque b, & c eamdem habuerit proportionem ad a, oportebit b, & c æquales esse. Quod, vel nemine admonente, per se satis patet.

De

Æqualitas duarum rationum dicitur proportionalitas, five analogia. Earum termini, ex ordine positi, dicuntur proportionales. Sit ratio a ad b æqualis rationi c ad d. Quantitates a, b, c, d, hoc ordine positæ, dicentur proportionales; idque fcribendo fic exprimes $a, b :: c, d$; legendo autem dices: a eft ad b, uti c ad d. Antecedentes a, & c dicuntur termini inter fe homologi; nec non & confequentes b, & d.

Perfæpe accidit, ut confequens primæ rationis idem fit atque antecedens alterius, ut fi quis ponat $a, b :: b, c$. Tunc proportio continua dicitur; ac tres illæ quantitates a, b, c dicuntur continue proportionales; b quidem media proportionalis inter a, & c; c vero tertia proportionalis poft a, & b.

Quod fi confequens primæ rationis differt ab antecedente alterius, ut cum ponitur $a, b :: c, d$, proportio difcreta dicitur.

Illud porro manifeftum eft. Si eft $a, b :: c, d$, erit etiam $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; & contra fi eft $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, erit etiam $a, b :: c, d$. Sed iam theoremata duo, quæ maximo ufui funt, exponamus.

Th. I. Si $a, b :: c, d$; productum extremorum a & d æquale eft producto intermediorum b & c. Quod fic oftenditur. Si $a, b :: c, d$; eft fane $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Jam

vero

vero si hujus æqualitatis pars utraque multiplicetur tum per b, tum per d, manebit æqualitas, exsistetque $ad = bc$. Q. e. d.

Id ipsum si trasferas ad quantitates tres continue proportionales, ut si propositum sit $a, b :: b, c$; invenies productum extremarum a & c æquale esse quadrato mediæ b. Quippe erit $ac = bb$.

Th. II. Si duo producta sunt æqualia, uti $bc = tu$; eorum latera sunt reciproce proportionalia: idest latus quodvis b primi est ad latus quodvis t secundi, ut latus alterum u secundi ad latus alterum c primi. Quod sic ostenditur. Cum sit $bc = tu$; si hujus æqualitatis pars utraque dividatur tum per t, tum per c, manebit æqualitas, exsistetque $\frac{b}{t} = \frac{u}{c}$; ergo erit $b, t :: u, c$. Q. e. d.

Quod si alterum e productis quadratum sit, ut si proponatur $bb = tu$, satis patet, fore $t, b :: b, u$, ideoque latera t, b, u hoc ordine sumpta, esse continue proportionalia.

Ex his duobus theorematis certissimam habes proportionalitatis notam, tum in quatuor quantitatibus, si productum extremarum æquale sit producto intermediarum, tum in tribus, si productum primæ & tertiæ æquale sit quadrato secundæ. Quæ nota si absit, proportjonalitas nulla erit.

De modis quibusdam argumentandi.

SI quantitates quatuor, certo ordine positæ, proportionales sunt, proportionales quoque erunt, si aliter disponantur; modo id ratione fiat. Hinc aliquot argumentandi modos invexerunt geometræ, quos etiam propriis nominibus distinxerunt.

Primum. Si $a, b :: c, d$, recte colliges: $b, a :: d, c$, qui argumentandi modus dicitur invertendo; neque minus: $a, c :: b, d$, qui modus dicitur alternando. Etenim cum sit $a, b :: c, d$, ideoque $ad = bc$; ex his, quæ paulo ante docui, licebit colligere $b, a :: d, c$; neque minus: $a, c :: b, d$.

Denique si $a, b :: c, d$, recte colliges, summam $a + b$ esse ad b, ut est summa $c + d$ ad d, nempe $a + b, b :: c + d, d$. Nam cum a contineat b toties, quoties c continet d; si ad a adiungas unum b, ut fiat summa $a + b$; atque ad c addas unum d, ut fiat summa $c + d$, summa illa profecto continebit b toties, quoties hæc continebit d; eritque $a + b, b :: c + d, d$.

Et quoniam ponendo $a, b :: c, d$, potuit etiam invertendo poni: $b, a :: d, c$, idcirco licebit etiam colligere: $a + b, a :: c + d, c$.

Qui alterutro ex his modis colligit, argumentari dicitur componendo.

Tertio. Summæ ac differentiæ par ratio est. Quare si $a, b :: c, d$, recte colliges $a - b, b :: c - d, d$; itemque $a - b, a :: c - d, c$. Qui argumentandi modus dicitur dividendo. Est

Eſt etiam alius argumentandi modus, quem vocant ex æquo. Hunc ſic explico. Sint ſeries duæ A, C, E &c., B, D, F &c. Sic ſemper procedentes, ut ſit A ad B, uti C ad D; & C ad I, uti E ad F &c. Recte colliges, eſſe primam A ad poſtremam E, ut eſt prima B ad poſtremam F, nempe A, E :: B, F. Etenim cum ſit ratio eadem inter A & B, quæ inter C & D, & inter E & F &c., erit ſane eadem inter primam A & primam B, quæ inter poſtremam E & poſtremam F; eritque A, B :: E, F; & alternando A, E :: B, F.

Iiſdem poſitis recte etiam colliges, eſſe ſummam omnium antecedentium A + C + E &c. ad ſummam omnium conſequentium B + D + F &c., ut eſt unum quodvis antecedens ad ſuum conſequens, puta E ad F: omnino eſſe A+C+E, B + D + F :: E, F. Quod oſtendere longius eſt, quam difficilius. Ac primum cum ſit A, B :: C, D, erit alternando A, C :: B, D; eritque pari ratione C, E :: D, F &c.

Hoc poſito cum ſit A, C :: B, D; erit componendo A + C, C :: B + D, D; atque alternando A + C, B + D :: C, D. Cum ſit ergo ratio C ad D eadem, quæ E ad F, erit A + C, B + D :: E, F; atque hic rurſum alternando habebis iam A + C, E :: B+D, F, ac componendo A+C+E, E :: B+D+F. F; unde alternando prodibit illud, quod quæritur: A + C + E, B + D + F :: E, F.

Quædam notanda.

MUlta sunt, eaque notatu digna, quæ ad simplices proportiones spectant, atque ab omni certo quantitatis genere abstractas. Horum paucula attingam.

I. Sint quantitates quatuor proportionales a, b, c, d; nempe $a, b :: c, d$. Erit quarta d æqualis producto secundæ b, & tertiæ c, diviso per primam a. Nam cum sit $a, b :: c, d$, erit $ad = bc$. Ac si utramque partem dividas per a, manebit æqualitas, eritque $d = \frac{bc}{a}$.

II. Sint quantitates tres a, b, c continue proportionales; nempe $a, b :: b, c$. Erit tertia c æqualis quadrato secundæ b, diviso per primam a. Nam cum sit $a, b :: b, c$, erit $ac = bb$. Ac si utramque partem dividas per a, manebit æqualitas, eritque $c = \frac{bb}{a}$.

III. Sint quantitates tres continue proportionales a, b, c; nempe $a, b :: b, c$. Erit secunda b æqualis radici illius producti, quod fit multiplicando primam a per tertiam c. Nam cum sit $a, b :: b, c$, erit $bb = ac$. Ac si utriusque partis radicem ponas b & $\sqrt{ac}$, manebit utique æqualitas, eritque $b = \sqrt{ac}$.

IV. Ratio a ad b; si tum a, tum b per eamdem quantitatem t vel multiplicentur, vel dividantur, manet eadem. Etenim est $at, bt :: a, b$, neque

que minus $\frac{a}{t}$, $\frac{b}{t}$ :: a, b; quippe eſt, in utroque, productum extremorum æquale producto intermediorum.

V. Si quantitates quatuor proportionales ſint a, b, c, d; nempe a, b :: c, d; proportionales quoque erunt ipſarum potestates, ſi modo ejuſdem gradus ſint, eodemque ſumantur ordine. Itaque erit aa, bb :: cc, dd; neque minus a^3, b^3 :: c^3, d^3. Etenim cum ſit a, b :: c, d, erit $ad = bc$. Ac ſi utriuſque partis quadratum effeceris, habebis $a^2 d^2 = b^2 c^2$, unde a^2, b^2 :: c^2, d^2; ſi cubum, habebis $a^3 d^3 = b^3 c^3$; unde a^3, b^3 :: c^3, d^3.

VI. Sint quantitates quatuor propoportionales a, b :: c, d; tum aliæ quatuor e, f :: g, h; ſi illæ per has deinceps multiplicentur, producta quoque erunt proportionalia, erit ſcilicet ae, bf :: cg, dh; oſtendam enim eſſe $aedh = bfcg$ in hunc modum. Cum ſit a, b :: c, d, erit $ad = bc$. Cum ſit e, f :: g, h, erit $eh = fg$. Ergo erit $adeh = bcfg$, vel, quod eodem redit, $aedh = bfcg$.

VII. Sit a, b :: c, d. Sit etiam t, c :: b, u; recte colliges, eſſe a, u :: t, d; quæ dicitur argumentatio ex æqualitate perturbata. Etenim cum ſit a, b :: c, d, erit $ad = bc$; ac cum ſit t, c :: b, u, erit etiam $tu = bc$. Erit ergo $ad = tu$, & a, u :: t, d.

a, b, u
t, c, d

De

De magnitudinibus, quae in geometria considerantur, per litteras exprimendis,

Omnis geometria, quod tute scis, Ratta ornatissime, in magnitudinibus dimetiendis versantur; neque eas modo, ut singulæ in se sunt, considerat; sed connexiones etiam, quas inter se habent, copulationesque varias studiosissime consectatur, ut alias ex aliis colligens eo tandem perveniat, quo vult. Ex illis autem connexionibus, copulationibusque, si paulo acrius inspectentur, nulla est, quæ non ad additionem, aut subtractionem, aut omnino ad eorum aliquid, quæ in algorithmo traduntur, referri possit. Persuasum est igitur multis, si magnitudines quædam primæ quibusvis litteris, ut libuerit, denominentur, magnitudines alias denominari sic posse atque exprimi, ut nexus etiam, quos vel ipsæ inter se, vel cum primis illis habent, exprimantur. Si id recte fiat, geometricas res multo facilius per calculos tractari posse confidunt, quam quomodo si veteribus tractabantur. Itaque mos a Cartesio profectus universas iam scholas pervasit.

Videndum est nobis igitur, quemadmodum magnitudines illæ, quas geometræ contemplantur, nec non & earum partes nexusque omnes per litteras possint exprimi; quæ quidem doctrina latissime patet, sed satis erit summa capita attigisse. Quod antequam facio, illud moneo: ubi scriptum inveneris $AB = a$, sive $CD = c + b$, seu quid simile, intelli-

li-

ligas volo, magnitudinem A B denominari a, magnitudinem C D denominari $c+b$. Quo fiet non res obſcurior, ſed ſcriptio brevior.

De magnitudinibus earumque partibus exprimendis.

UBi magnitudinem quampiam per a expreſſeris; ſi aliam ipſi æqualem velis ponere, hanc quoque per a exprimes; ſi duplam, per $2a$; ſi triplam, per $3a$ &c. Quod ſi partem illius dimidiam velis ponere, hanc exprimes per $\frac{a}{2}$; ſi tertiam per $\frac{a}{3}$ &c.

Iam vero ſi magnitudinem poſueris e duabus, pluribuſve coaleſcentem, earum vero, e quibus coaleſcit, unam per a expreſſeris, alteram per b, tertiam per c, totam, quæ ex his coaleſcit, exprimes per ſummam $a+b+c$.

Quod ſi magnitudinem diviſeris in partes plures, puta tres, eamque, quam diviſam habes, denominaveris a; ac partem unam feceris b, partem alteram c, erit tibi pars reliqua denominanda $a-b-c$. Atque hæc quidem reconditum nihil habent.

De rectangulis exprimendis.

DEſcriptio rectanguli multiplicationem quamdam continet, quam ſic explico. Sit rectangulum A C, (*Fig.* 1.) cujus latera A B, B C. Si linea A B, ſibi per-

perpetuo parallela, procedere intelligatur per totam B C; ea certe videbitur toties repeti, quot sunt elementa lineæ B C, quotcumque demum ea sint, & qualiacumque; videbitur ergo multiplicari per lineam B C. Et quoniam in illo incessu conficiet utique spatium rectanguli A C; idcirco illius multiplicationis productum censebitur esse rectangulum ipsum A C.

Igitur si latus A B denominaveris a, latus B C b; rectangulum ipsum A C denominandum tibi erit ab, ex multiplicatione scilicet a per b. Et quoniam sumi potest A B pro altitudine, sumpta B C pro basi; idcirco passim dicitur rectangulum exprimi multiplicando altitudinem per basim.

Hinc statim theoremata exsistunt nonnulla, quæ in geometria præcipua habentur; neque prætermittenda. Sint duo rectangula A C, D F. Illius altitudo A B$=a$. Basis B C$=b$. Alterius altitudo D E$=c$. Basis E F$=d$. Ex his, quæ modo dixi, erit sane rectangulum A C $= ab$. Rectangulum D F $= cd$. His positis sic statuo.

Primum. Ratio rectanguli A C ad rectangulum D F est composita e duabus rationibus: altitudinis A B ad altitudinem D E, & basis B C ad basim E F; nam est utique ratio ab ad cd composita e duabus rationibus a ad c, & b ad d.

Secundo. Si duo rectangula A C, D F sint magnitudine æqualia, erunt altitudines & bases inter se reciproce proportionales; & vicissim. Nam utique, si sit $ab = cd$, erit $a, c :: d, b$. Et vicissim si sit $a, c :: d, b$, erit $ab = cd$. Ter-

Tertio. Si altitudines amborum rectangulorum æquales inter se fuerint, erunt rectangula ipsa inter se, uti bases; ac si bases æquales fuerint, erunt rectangula ipsa inter se, uti altitudines. Etenim si altitudines a & c sint æquales, erit utraque $= a$; eritque rectangulum unum $= ab$; rectangulum alterum $= ad$. Est autem ab ad ad, uti b ad d, idest uti basis ad basim. Pari modo si bases b & d sint æquales, erit utraque $= b$; eritque rectangulum unum $= ab$, rectangulum alterum $= cb$. Est autem ab ad cb, uti a ad c, idest uti altitudo ad altitudinem.

De quadrato.

Non est dubium, quin, quæ de rectangulo communiter dicta sunt, ea in quadratum quoque conveniant. Sed quoniam quadratum ambo latera A B, & B C habet æqualia, ideoque eodem modo denominanda; hoc illi erit proprium. Quomodocumque latus unum expresseris; si expressionem hanc in se duxeris, magnitudinem quadrati expressam habebis. Fac latus B C $= a$; (*Fig.* 2.) erit magnitudo quadrati A C $= aa$.

Quo illud etiam facile intelligitur. Quomodocumque magnitudo quadrati expressa fuerit, exprimetur latus per hujus expressionis radicem. Magnitudo quadrati sit $= aa$; latus erit $= a$. Magnitudo quadrati sit $= at$; latus erit $= \sqrt{at}$, nempe ea li-

 nea,

nea, quæ in se ducta efficit magnitudinem $a\,r$.

Iam vero si quadratum fuerit æquale rectangulo, puta $a\,a = c\,d$, erit sane $c, a :: a, d$; nempe latus quadrati a medium proportionale inter latera rectanguli c & d. Et contra, si fuerit latus quadrati a medium proportionale inter latera rectanguli c & d, nempe $c, a :: a, d$; erit procul dubio quadratum æquale rectangulo, idest $a\,a = c\,d$. Atque hæc ex iis, quæ supra diximus, manifesta satis sunt.

De parallelogrammis exprimendis.

Sit parallelogrammum A C; basis B C; altitudo B Γ. (*Fig.* 3.) Non est dubium, quin parallelogrammum A C magnitudine æquale sit rectangulo T C. Si hoc ergo expresseris, multiplicando altitudinem B T per basim B C, eo ipso expressam habebis magnitudinem parallelogrammi A C. Sit parallelogrammi altitudo $TB = a$, basis $BC = b$. Erit tibi parallelogrammum ipsum $AC = a\,b$.

Atque huc facile theoremata illa transferuntur, quæ paulo ante in rectangulis demonstravimus.

De triangulis exprimendis.

Sit triangulum A B C; (*Fig.* 4.) basis B C; altitudo A T. Non est dubium, quin si rectangulum fiat, multiplicando altitudinem A T per basim B C, hujus rectanguli dimidia pars sit triangulum ipsum A B C.

Si

Si ergo hoc rectangulum feceris, tum diviseris per 2, expressam habebis magnitudinem trianguli A B C. Sit altitudo A T $= a$. Basis B C $= b$. Erit rectangulum $= ab$; ac triangulum A B C $= \frac{ab}{2}$.

Quod si hoc triangulum cum altero D E F (*Fig.* 5.) comparare velis, cujus altitudo D Q $= c$; basis E F $= d$; habebis sane triangulum A B C $= \frac{ab}{2}$; triangulum D E F $= \frac{cd}{2}$. Quare cum sit $\frac{ab}{2}$ ad $\frac{cd}{2}$, uti ab ad cd; huic facile traducentur theoremata illa quæ supra in rectangulis explicavimus.

De magnitudinibus proportionalibus exprimendis.

Si magnitudines quatuor proportionales sint, ac primam expresseris per a, secundam per b, tertiam per c; quartam exprimes per productum secundæ & tertiæ divisum per primam; nempe $\frac{bc}{a}$. Et est sane $a, b :: c, \frac{bc}{a}$.

Si magnitudines tres fuerint continue proportionales; primam autem expresseris per a, secundam per b; tertiam exprimes per quadratum secundæ divisum per primam; nempe $\frac{bb}{a}$. Et est sane $a, b :: b, \frac{bb}{a}$.

Quod si e tribus primam expresseris per a, ter-

tiam per c; secundam, ideſt mediam proportionalem exprimes per radicem illius producti, quod fit multiplicando primam per tertiam; nempe $\sqrt{ac}$. Eſt ſane $a, \sqrt{ac} :: \sqrt{ac}, c$.

Atqui ſcire convenit, quæ proportiones in geometria, quibuſque in locis occurrant; quod ſi neſcias; fruſtra erit, quo modo per litteras exprimendæ ſint, cognoviſſe. Ne id autem aliunde tibi petendum ſit, digrediar paululum, ac præcipuos quoſdam fontes monſtrabo, unde proportiones in geometria ducuntur fere omnes.

De figuris rectilineis ſimilibus.

Figuræ duæ rectilineæ A B C D E, (*Fig. 6.*) *a b c d e* dicentur ſimiles, ſi duas habeant conditiones: primum ſi anguli unius æquales ſint angulis alterius, ſinguli ſingulis, ut ſi æquales ſint A & *a*, B & *b*, C & *c* &c.: deinde ſi latera, æquales angulos comprehendentia, ſint propottionalia; ut ſi ſit A B ad B C, ut *a b* ad *b c*; & B C ad C D, uti *bc* ad *cd* &c. Harum conditionum ſi alterutra abſit, figurarum ſimilitudo nulla erit. Quamquam triangula hoc habent proprium, ut ſi una adſit, altera abeſſe non poſſit; quod ſtatim oſtendam, ſi duo theoremata prius poſuero, tamquam lemmata.

LEM-

LEMMA I.

IN triangulo ABC (*Fig.* 7.) ducta sit recta DE, parallela ad BC, secansque latera AB, AC in D & E. Dico esse AD, DB :: AE, EC.

Ut id demonstretur, ducantur rectæ EB, DC. Duo triangula DEB, DEC erunt sane æqualia, ut quæ super eadem basi DE constituta sunt, interque easdem parallelas DE, BC; quare eadem erit trianguli ADE ad utrumlibet ratio. Atqui ratio trianguli ADE ad triangulum DBE est ratio basis AD ad basim DB; quippe ambo hæc triangula æqualem habent altitudinem; ac pari de causa ratio trianguli ADE ad triangulum DCE est ratio basis AE ad basim EC; ergo ratio AD ad DB eadem est, quæ AE ad EC; estque AD, DB :: AE, EC. Q. e. d.

Coroll. Cum sit AD, DB :: AE, EC, erit etiam componendo AD + DB, AD :: AE + EC, AE; ideſt AB, AD :: AC, AE; & alternando AB, AC :: AD, AE.

LEMMA II.

IN triangulo ABC ducta sit recta DE parallela ad BC, secansque latera AB, AC in D & E. Dico esse AB BC :: AD, DE.

Ut id demonstretur, sumatur BF = DA. (*Fig* 8.), ducaturque FH, parallela ad AC, secansque BC

in

in H. His positis cum sit B F = D A, sitque angulus B æqualis angulo A D E, & angulus B F H æqualis angulo A, erunt triangula A D E, F B H omnino æqualia: B F = D A, & B H = D E. Atqui est B A, B C :: B F, B H (ex coroll. Lem. I.), ergo B A, B C :: D A, D E. Q. e. d.

Scholion. Constat iam, si in triangulo A B C (*Fig.* 9.) ducta sit recta D E, parallela ad B C, secansque latera A B; A C in D & E, esse duo triangula A B C, A D E plane similia, namque & habent angulos singulos singulis æquales, ut patet; & latera circa æquales angulos proportionalia esse, e superioribus lemmatis satis liquet.

THEOREMA I.

SInt triangula duo A B C, P Q R (*Fig.* 10.) æquiangula; sintque anguli æquales A & P, B & Q, C & R. Dico ea esse similia.

Ut id demonstretur, sumatur in A B tractus A V = P Q; ducaturque V T parallela ad B C, secansque A C in T. Cum sit A V = P Q, & angulus A æqualis angulo P; & angulus A V T æqualis angulo B, idest angulo Q; erit triangulum A V T per omnia æquale triangulo P Q R. Atqui triangulum A V T simile plane est triangulo A B C; ergo etiam triangulum P Q R. Q. e. d.

THEO-

THEOREMA II.

Sint triangula duo A B C, P Q R; habeantque latera lateribus proportionalia; sit A B, B C :: P Q, Q R, & B C, C A :: Q R, R P. Dico ea esse similia.

Ut id demonstretur, sumatur in A B tractus A V = P Q, ducaturque V T, parallela ad B C, secansque A C in T. Cum sit A B, B C :: A V, V T; neque minus sit A B, B C :: P Q, Q R; sit autem A V = P Q, erit sane etiam V T = Q R; quod manifestum per se est. Pari ratione ostendetur A T = P R. Erit igitur triangulum A V T æquale per omnia triangulo P Q R. Atqui triangulum A V T simile plane est triangulo A B C; ergo etiam triangulum P Q R. Q. e. d.

THEOREMA III.

Sint triangula duo A B C, P Q R; sitque angulus A æqualis angulo P; ac præterea sit A B, A C :: P Q, P R. Dico triangula A B C, P Q R esse similia.

Ut id demonstretur, sumatur in A B tractus A V = P Q, ducaturque V T, parallela ad B C, secansque A C in T. Cum sit A B, A C :: A V, A T; sitque etiam A B, A C :: P Q, P R; erit A V, A T :: P Q, P R. Est autem A V = P Q, ergo etiam A T = P R; quod manifestum per se est. Erit igitur triangulum A V T æquale per omnia triangulo P Q R. Atqui tri-

an-

angulum A V T fimile plane eft triangulo A B C; ergo etiam triangulum P Q R. Q. e. d.

Atque hæc quidem funt capita, unde proportiones in geometria oriuntur prope omnes. Ad denominandi rationem revertor.

De induftria in captandis denominationibus adhibenda.

PRæterea, quæ adhuc diximus, quæque in ponendis denominationibus fervari oportet, erit etiam induftria, haud fane magna, adhibenda, fed tamen non nulla; cujus rei exempla duo afferam, quæ & idipfum oftendent, & pofthac etiam ufui erunt.

Exemplum I. Sit triangulum rectangulum A B C. Catheti A *B*, A C. (*Fig.* 11.) Hypotenufa B C. Si cathetum A B denominaveris a; cathetum A C b; hypothenufæ denominationem fic erues. Erit fane catheti A B quadratum $= aa$; catheti $AC = bb$. Igitur fumma $aa + bb$ æquabit quadratum hypotenufæ B C. Erit ergo hypotenufa $BC = \sqrt{aa + bb}$.

Quod fi hypotenufam B C expreffferis per a; cathetum A B per b; catheti alterius A C denominationem fic erues. Si hypotenufæ quadrato aa dempferis catheti A B quadratum, ideft bb, erit fane $aa - bb$ quadratum catheti alterius A C. Erit ergo cathetus ipfe $AC = \sqrt{aa - bb}$.

Exemplum II. Sit tibi exprimenda æqualitas an-

gu-

gulorum A & B. A (*Fig.* 12) quovis puncto P lateris A P duc perpendicularem P T ad latus alterum A T. Itemque a quovis puncto V lateris B V duc perpendicularem V H ad latus alterum B H. Satis liquet, si fuerit A T, T P :: B H, H V, triangula A T P, B V H fore similia, & angulos A, B aequales. Fac ergo ponas A T $= a$, T P $= b$, B H $= c$, ac tum demum H V $= \frac{bc}{a}$; expressam iam habebis proportionalitatem illam, nec non & triangulorum similitudinem, & angulorum A, B aequalitatem.

De theorematum demonstratione.

HIs, quae hactenus dicta sunt, iam te arbitror, Ratta ornatissime, satis instructum esse ad geometriae theoremata quamplurima, nec non & problemata pertractanda; quamquam, si me audies, non prius problemata attinges, quam te paululum in Theorematis exercueris. Quare de his primum dicam.

Theorema est propositio, quae demonstrari postulat; eaque vel in aequalitate duarum quantitatum consistit, vel in eo certe, quod ad aequalitatem quamdam spectat, de qua si constet, etiam de theorematis veritate constet. Id, quod in exemplis, quae post afferam, satis apparebit. Omne igitur studium eo referetur, ut de duarum quantitatum aequalitate perquiratur; quod facile erit, si quantitates illae, de quarum aequalitate agitur, fuerint rite denominatae;

nam denominatio ipsa, an illæ æquales sint, an quid differant, facile ostendet, & quantum differant. Idque etiam exempla illustrabunt.

Exemplis autem utar non reconditioribus & longe petitis, sed iis, e quibus propositiones perdiscas geometris familiarissimas, maximeque necessarias. Neque demonstrationes in singulis theorematis absolvam; sed inchoabo, quas deinde absolves ipse. Neque breviores consectabor, ut præceptores plerique faciunt; qui, brevitatis laudem paulo nimium studentes, elegantias ex omni parte conquirunt. Quos ego quidem laudare malim, quam sequi; nam, quod res ipsa me docuit, his, qui primum ad hæc studia ingrediuntur, exercitatio lentior longiorque plus prodest, quam elegans festinatio.

Sed iam ad theoremata, quæ tibi exemplo erunt, veniamus. In quibus legendis ne quando hæreas, iam nun moneo, me, ubi scripsero verbi gratia $\overline{AB}^2$, intelligere quadratum lineæ AB; ac si scripsero $AB \times CD$ intelligere rectangulum ex AB ducta in CD. Quod si numerum quempiam præfixero, intelliges quadratum, vel rectangulum per eum numerum multiplicandum esse.

THEO-

THEOREMA I.

Sit linea A B (*Fig.* 13) secta, ut lubet, in C. Dico esse $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\, AC \times CB$.

$AB = a$
$AC = b$
$CB = a - b$
$\overline{AB}^2 = aa$
$\overline{AC}^2 = bb$
$\overline{CB}^2 = aa - 2ab + bb$
$AC \times CB = ab - bb$
$2\, AC \times CB = 2ab - 2bb$

Demonstratio. Sit $AB = a$. $AC = b$. Erit $CB = a - b$. Ac iam erit $\overline{AB}^2 = aa$, $\overline{AC}^2 = bb$. $\overline{CB}^2 = aa - 2ab + bb$. $AC \times CB = ab - bb$: idque ductum in 2 erit $= 2ab - 2bb$. Vide iam ergo, an sit

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 + 2\, AC \times CB$$

idest

$$aa = bb + aa - 2ab + bb + 2ab - 2bb.$$

THEOREMA II.

Sit linea A B (*Fig.* 14.) secta, ut lubet, in C & D. Dico esse $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\, AC \times CD + 2\, AC \times DB + 2\, CD \times DB$.

Demonstratio. Sit $AB = a$. $AC = b$. $CD = c$. Erit $DB = a - b - c$. Ac iam erit $\overline{AB}^2 = aa$. $\overline{AC}^2 = bb$. $\overline{CD}^2 = cc$. $\overline{DB}^2 = aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$. Eritque $2\,AC \times CD = 2bc$. $2\,AC \times DB = 2ab - 2bb - 2bc$. Ac tandem $2\,CD \times DB = 2ac - 2bc - 2cc$.

$$AB = a$$
$$AC = b$$
$$CD = c$$
$$DB = a - b - c$$
$$\overline{AB}^2 = aa$$
$$\overline{AC}^2 = bb$$
$$\overline{CD}^2 = cc$$
$$\overline{DB}^2 = aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$$
$$2\,AC \times CD = 2bc$$
$$2\,AC \times DB = 2ab - 2bb - 2bc$$
$$2\,CD \times DB = 2ac - 2bc - 2cc$$

Vide iam ergo an sit

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 + 2\,AC \times CD + 2\,AC \times DB + 2\,CD \times DB.$$

Ideſt an ſit

$$aa = bb + cc + aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc + 2bc + 2ab - 2bb - 2bc + 2ac - 2bc - 2cc.$$

THEOREMA III.

Sint duæ lineæ AB, CD (*Fig.* 15) ita ſectæ in E & H, ut ſit AB, CD : : AE, CH. Dico eſſe etiam AB, CD : : EB, HD.

De-

$AB = a$
$CD = b$
$AE = c$
$CH = \frac{bc}{a}$
$EB = a - c$
$HD = \frac{ab - bc}{a}$

Demonſtratio. Sit $AB = a$. $CD = b$. $AE = c$. (*Fig.* 15) Erit CH (ut quæ quarta proportionalis eſt poſt a, b, c) $= \frac{bc}{a}$. Iam vero erit $EB = a - c$, & $HD = b - \frac{bc}{a}$. ſive $\frac{ab - bc}{a}$.

Hic iam facile conſtat, eſſe

AB, CD :: EB, HD

ideſt

$$a, b :: a - c, \frac{ab - bc}{a}.$$

THEOREMA IV.

Sit ſemicirculus AMB. (*Fig.* 16) Diameter AB. Centrum C. A quovis puncto P diametri ducta ſit perpendicularis PM, ſecans periferiam in M. Dico tres lineas AP, PM, PB eſſe continue proportionales, nempe AP, PM :: PM, PB. Quæ propoſitio nobiliſſima eſt.

$CA = CB = a$
$CP = b$
$AP = a - b$
$PB = a + b$
$PM = \sqrt{aa - bb}$

Demonſtratio. Sit radius CA, ideoque etiam $CB = a$. $CP = b$. Erit iam $AP = a - b$, $PB = a + b$. Denominationem lineæ PM tibi comparabis ad hunc modum. Duc rectam MC, quæ, ut radius circuli, erit & ipſa $= a$. Cum ergo in triangulo rectangulo MPC habeas hypotenuſam $MC = a$, & cathetum $PC = b$ facile invenies cathetum alterum

PM

$PM = \sqrt{aa - bb}$. Iam facile intelliges, esse

$AP, PM :: PM, PB$

idest

$a - b, \sqrt{aa - bb} :: \sqrt{aa - bb}, a + b$.

Invenies enim productum ex $a - b$ & $a + b$ æquale quadrato mediæ $\sqrt{aa - bb}$.

THEOREMA V.

Sint duo triangula similia A B C, D E F. (*Fig.* 17) Dico ea esse inter se, uti quadrata laterum homologorum. Id ipsum distinctius explico. Æquales sint anguli B & E; sitque $AB, BC :: DE, EF$; ideoque latera A B, D E sint homologa. Dico, triangulum A B C esse ad triangulum D E F, uti $\overline{AB}^2$ ad $\overline{DE}^2$. Nempe $ABC, DEF :: \overline{AB}^2, \overline{DE}^2$.

$AB = a$
$BC = b$
$DE = c$
$EF = \frac{bc}{a}$
$\overline{AB}^2 = aa$
$\overline{DE}^2 = cc$
$AL = t$
$ABC = \frac{bt}{2}$
$DEF = \frac{bcct}{2aa}$

Demonstratio. Sit $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$. EF (ut quæ est quarta proportionalis post a, b, c) $= \frac{bc}{a}$. $\overline{AB}^2 = aa$. $\overline{DE}^2 = cc$.

Triangula porro ipsa sic exprimes. Sumptis B C, E F pro basibus, sint altitudines A L, D V. Facile constat, triangula A B L, D E V esse similia; nam anguli B, & E sunt æquales; item A L B, D V E; itaque etiam tertius B A L æqualis tertio E D V. Erit igitur $AB, AL :: DE, DV$.

Sit

Sit ergo $AL = t$. Erit $DV = \frac{ct}{a}$.

Ac si iam in utroque triangulo ABC, DEF multiplicaveris altitudinem per basim, productumque diviseris per 2, habebis $ABC = \frac{bt}{2}$. $DEF = \frac{bcct}{2aa}$.

Vide iam, an sit $ABC, DEF :: \overline{AB}^2, \overline{DE}^2$

idest

$$\frac{bt}{2}, \frac{bcct}{2aa} :: aa, cc.$$

Comperies sane, tum extremorum, tum intermediorum producta æqualia esse.

THEOREMA VI.

Sit semicirculus AMB. (*Fig.* 18) Diameter AB. Centrum C. Secto radio CB bifariam in P, ductaque perpendiculari PM, quæ secet periferiam in M, ab extremo puncto A radii CA ducatur AM. Dico esse AM duplam lineæ PM; idest $AM = 2PM$.

$CB = a$

$CP = \frac{a}{2}$

$AP = \frac{3a}{2}$

$PM = \sqrt{\frac{3aa}{4}}$

$2PM = \sqrt{3aa}$

$AM = \sqrt{3aa}$

Demonstratio. Sit $CB = CA = a$. Erit $CP = PB = \frac{a}{2}$. $AP = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$. PM (cum sit media proportionalis inter AP & PB) $= \sqrt{\frac{3aa}{4}}$; ac $2PM = 2\sqrt{\frac{3aa}{4}} = \sqrt{\frac{12aa}{4}} = \sqrt{3aa}$.

Iam

Iam vero, expressis cathesis P A, P M in triangulo rectangulo A P M, facile invenies hypotenusam $AM = \sqrt{3aa}$. Quo satis liquet esse $AM = 2PM$.

THEOREMA VII,

Angulus acutus B A C (*Fig.* 19) subtendatur a recta B C. Ducatur B T perpendicularis ad A C. Dico summam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ esse majorem quam $\overline{BC}^2$; excessum autem æqualem esse summæ $2\,\overline{AT}^2 + 2\,TC \times TA$.

$BC = a$
$TC = b$
$BT = \sqrt{aa - bb}$
$TA = c$
$AC = b + c$
$AB = \sqrt{aa - bb + cc}$
$\overline{BC}^2 = aa$
$\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$
$\overline{AC}^2 = bb + 2bc + cc$

Demonstratio. Sit $BC = a$, $TC = b$. Propter angulum rectum B T C invenies $BT = \sqrt{aa - bb}$. Sit $TA = c$. Eritque $AC = b + c$; ac propter angulum rectum A T B invenies $AB = \sqrt{aa - bb + cc}$. Iam ergo habebis $\overline{BC}^2 = aa$, $\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$, neque minus $\overline{AC}^2 = bb + 2bc + cc$.

Ac tandem habebis summam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = aa + 2cc + 2bc$. quæ sane major est, quam aa, ideft quam $\overline{BC}^2$. Excessusque est $2cc + 2bc$, ideft $2\,\overline{AT}^2 + 2\,TC \times TA$.

THEO-

THEOREMA VIII.

Angulus obtusus B A C (*Fig.* 20) subtendatur a recta B C. Ducatur B T perpendicularis ad C A productam in T. Dico summam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$ esse minorem, quam $\overline{BC}^2$; defectum autem æqualem esse differentiæ $2\,\overline{AT}^2 - 2\,TC \times TA$. Quæ differentia sane est negativa, cum sit $TC \times TA$ major quam $\overline{AT}^2$.

$BC = a$
$TC = b$
$BT = \sqrt{aa - bb}$
$TA = c$
$AC = b - c$
$AB = \sqrt{aa - bb + cc}$
$\overline{BC}^2 = aa$
$\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$
$\overline{AC}^2 = bb - 2bc + cc$

Demonstratio. Sit $BC = a$. $TC = b$. Propter angulum rectum B T C invenies $BT = \sqrt{aa - bb}$. Sit iam $TA = c$, eritque $AC = b - c$. ac propter angulum rectum ATB invenies $AB = \sqrt{aa - bb + cc}$. Iam ergo habebis $\overline{BC}^2 = aa$. $\overline{AB}^2 = aa - bb + cc$, neque minus $\overline{AC}^2 = bb - 2bc + cc$.

Ac tandem habebis summam $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = aa + 2cc - 2bc$; quæ sane minor est, quam aa, idest quam $\overline{BC}^2$. Etenim differt ab aa per $2cc - 2bc$, idest per $2\,\overline{AT}^2 - 2\,TC \times TA$, quæ differentia est negativa.

ALGORITHMI
PARS ALTERA
Ad Nobilissimum Adolescentem
FRANCISCUM RATTAM.

NOn dubito, mi Ratta suavissime, quin quæ tibi de algorithmo paucis ante mensibus tradidi, ea iam, quod ingenium tuum est, probe teneas, & usu atque exercitatione familiaria, ut ita dicam, tibi feceris; quapropter tempus esse arbitror, ut illa aperiam, quæ initio prætereunda esse duxi, & alium in locum differenda, quo uberiorem habeas hujus artis tractationem. Dicam igitur de potestatibus primum, tum de radicibus cujusvis generis, & pauca attingam de quantitatibus vinculo quovis, ut ajunt, coercitis. Si otium erit, etiam de æquationibus brevissime tradam. His te satis paratum esse existimabo ad communis geometriæ problemata dissolvenda. Illud autem maxime cupio, teque etiam atque etiam rogo, ut quæ hic scripta a me erunt, attente perlegas, ac tecum ipse singula mediteris, nec ante ad ea, quæ secuntur, progrediaris, quam quæ præcesserint, probe intellexeris. Quod quidem te moneo,

non

non quod moneri opus habeas, ſcio enim & qua voluntate ſis, & quantum ingenio valeas; ſed eſt hæc præceptoribus monendi conſuetudo.

De poteſtatibus, quarum exponens eſt numerus integer, & poſitivus.

Si poteſtates hujuſmodi duæ ſint ejuſdem quantitatis a, puta a^5, a^3; monui iam ante has ſimul multiplicari, colligendo exponentes ambos 5, & 3 in unum, ſcribendoque a^8. Et ſane pro multiplicatis haberentur a^5 & a^3, ſi littera a quinquies ſcripta rurſum deinceps ter ſcriberetur, ideſt ſi ſcriberetur octies.

E contrario ſi altera per alteram dividenda ſit, puta a^5 per a^3; id fiet adimendo hujus exponentem exponenti illius, ſcribendoque a^{5-3}, Ideſt a^2. Et eſt ſane $\frac{a^5}{a^3} = a^2$; quæ æqualitas ſtatim ſe prodit, ſi multiplices utramque partem per a^3. Quod ſi dividenda ſit a^3 per a^5; præcepto inſiſtens eodem, pones a^{3-5}, ideſt a^{-2}. unde poteſtas exiſtet cum exponente negativo; de quo genere infra explicabo.

Si poteſtas quævis propoſita, puta a^2, evehenda ipſa ſit ad poteſtatem ſecundam, id fiet utique, multiplicando ejus exponentem per 2, ponendoque a^4. Et ſane eſſet a^2 ad poteſtatem ſecundam evecta, ſi bis deinceps ſcriberetur $a\,a$, ideſt quater ſcriberetur littera a. Ac pari ratione ſi ſit a^2 evehenda ad

ad potestatem tertiam, multiplicabitur exponens ejus 2 per 3, poneturque a^6; si ad quartam, per 4; poneturque a^8. Omninoque multiplicabitur exponens per eum numerum, qui gradum potestatis indicat, ad quam potestas proposita evehenda est.

De potestatibus cum exponente negativo.

ANtequam ad propositum venio, res ipsa postulat, ut de numeris negativis pauca dicamus. Negativi numeri vis omnis in eo est, ut contrarium numerum tollat. Numerus -2 tollit 2; -3 tollit 3; &c. Negativis his numeris invectis, universa numerorum series ex utraque parte in infinitum excurrit

&c., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, &c.

Qua in serie si cuivis termino unitatem addas, is æqualis illi fiet, qui ipsi est ad dexteram. Sic 2, unitate addita, fit 3; item 1, unitate addita, fit 2; item 0, unitate addita, fit 1; item -1, unitate fit 0; item -2, unitate addita, fit -1, &c. Eaque re apparet, terminos omnes seriei hujus, procedendo a dextera ad sinistram, esse, alium alio, minores; minoremque esse 1, quam 2; & 0, quam 1; & -1, quam 0; & -2, quam -1, &c.

Iam vero exponentibus ex utraque parte excurrentibus in infinitum, potestates quoque ipsæ ex utraque parte in infinitum excurrunt ad hunc modum

&c. a^{-4}, a^{-3}, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, a^3, a^4, &c.

Hinc illæ exsistunt potestates a^0, a^{-1}, a^{-2}, aliæque,

quæ

quæ exponentem habent negativum.

Hic inquiet aliquis. Eſt a^2 illud ipſum, quod ex mathematicorum inſtituto ſignificaret littera a, ſi duabus deinceps vicibus ſcriberetur; & a^3 illud ipſum, quod ſignificaret littera a, ſi tribus ſcriberetur vicibus. Quid ergo ſit a^0? Nam ſi ſcribatur littera a vicibus o, ne ſcribetur quidem. Quid porro ſit a^{-1}, aut a^{-2}, aut a^{-3}, cum ſcribi littera a vicibus aut -1, aut -2, aut -3 non poſſit?

Ad hæc ſic repono. Ut ſcribi littera a non poſſit, neque vicibus o, neque vicibus -1, aut -2 &c., puta tamen poſſe. Non eſt novum, neque mathematicorum conſuetudine alienum, quæ fieri non poſſunt, ea putare facta eſſe, ac, ſi facta ſint, quid inde ſequatur, perquirere. Spatia duo ſolida penetrare in ſe mutuo non poſſunt. Id tamen fieri in ſpatiis quibuſdam Euclides fingit, animadvertitque, ſi id fiat, illa ſibi mutuo congruere; quo æqualitatem oſtendit. Nemo eſt, quin pro impoſſibilibus habeat $\sqrt{-7}$, & $\sqrt{-2}$; tamen convenit inter omnes, ſi radices eæ ſint, ac ſimul multiplicentur, ex iis effici $-\sqrt{14}$. Hujus generis exempla innumerabilia afferri poſſunt. Puta igitur, litteram a ſcribi poſſe vicibus o, aut -1, aut -2, &c. non ſecus quam ſcribi poteſt vicibus 1, aut 2, aut 3 &c. Hinc ſtatim intelliges tria conſequi.

Primum illud. Poteſtates duæ quævis ejuſdem quantitatis a, etiamſi exponentem negativum habeant, non ſecus multiplicabuntur, atque illæ, quæ ex-

exponentes habent positivos, idest colligendo exponentes ambos in unum. Multiplicanda sit ergo a^{-2} per a^{-5}, pones a^{-2-5}, idest a^{-7}. Multiplicanda sit a^{-3} per a^{7}, pones a^{-3+7}, idest a^{4} &c.

Secundo illud. Potestates duæ quævis quantitatis ejusdem a dividentur altera per alteram, si exponens hujus adimatur exponenti illius, etiamsi exponentem negativum habeant. Dividenda sit ergo a^{-2} per a^{-5}, pones a^{-2+5}, idest a^{3}. Dividenda sit a^{-4} per a^{-2}, pones a^{-4+2}, idest a^{-2}. Dividenda sit a^{4} per a^{-3}, pones a^{4+3}, idest a^{7}; &c.

Tertio illud. Si potestas quævis exponentem habens negativum evehenda ipsa sit ad potestatem aliquam, id fiet, si ejus exponens per eum numerum multiplicabitur, qui gradum illius potestatis indicat, ad quam evehenda est. Evehes ergo a^{-2} ad potestatem secundam, si exponentem -2 multiplicaveris per 2, ac pones a^{-4}; ad tertiam, si per 3, ac pones a^{-6}; ad quartam, si per 4, ac pones a^{-8}; &c.

De valoribus singularum potestatum a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} &c.

Antequam de his dico, præstat unum ponere de potestate a^{0}. Dico igitur esse $a^{0}=1$. Idque sic ostendo. Est utique $a^{2}, a^{1} :: a^{1}, a^{0}$; quippe quia, si multiplicaveris a^{2} per a^{0}, efficies a^{2}; neque minus efficies a^{2}, si multiplicaveris a^{1} per a^{1}. Atqui est etiam $a^{2}, a^{1} :: a^{1}, 1$, uti manifestum est; ergo est $a^{0}=1$.

Hoc

Hoc pofito dico effe $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$; nam fi utramque æquationis hujus partem multiplicaveris per a^1, ex altera parte habebis a^0, ex altera 1, quæ duo, ut modo oftendi, funt æqualia.

Dico etiam effe $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; nam fi utramque hujus æquationis partem multiplicaveris per a^2, habebis, hic quoque, hinc a^0, hinc 1.

Dico tertio effe $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$; nam fi utramque æquationis partem multiplicaveris per a^3, hic quoque habebis $a^0 = 1$.

Eademque ratione oftendetur effe $a^{-4} = \frac{1}{a^4}$, & $a^{-5} = \frac{1}{a^5}$, &c.

Locus monet, ne illud prætercam. Quemadmodum eft $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, ita eft etiam $a^2 = \frac{1}{a^{-2}}$; quippe, fi utramque partem multiplicaveris per a^{-2}, habebis $a^0 = 1$. Quæ certiffima eft æqualitas. Eodemque modo invenies $a^3 = \frac{1}{a^{-3}}$, & $a^4 = \frac{1}{a^{-4}}$, &c. Sed iam ad alia pergamus.

De

De potestatibus, quarum exponens est numerus fractus.

Occurrunt persæpe potestates, quarum exponens est numerus fractus, uti $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{4}{5}}$, &c. De his etiam est dicendum. Ac statim manifestum est, ad potestates hujusmodi illa omnia transferri posse, quæ adhuc diximus de potestatibus exponentem negativum habentibus.

Itaque si duæ sint potestates ejusdem quantitatis a, habentes exponentem fractum puta $a^{\frac{2}{3}}$, $a^{\frac{4}{5}}$, eas inter se multiplicabis exponentes ambos in unam summam colligendo sic $a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}$, sive $a^{\frac{22}{15}}$.

Quod si altera per alteram dividenda sit, puta $a^{\frac{2}{3}}$ per $a^{\frac{4}{5}}$, id efficies adimendo exponentem hujus exponenti illius sic $a^{\frac{2}{3}-\frac{4}{5}}$, sive $a^{-\frac{2}{15}}$.

Ac si potestas quæpiam exponentem habens fractum evehenda ipsa sit ad potestatem aliquam; id efficies multiplicando ejus exponentem per eum numerum, qui indicat potestatem, ad quam est evehenda. Itaque evehes $a^{\frac{1}{3}}$ ad potestatem secundam multiplicando exponentem $\frac{1}{3}$ per 2, scribendoque $a^{\frac{2}{3}}$. Evehes ad tertiam, mutiplicando exponentem $\frac{1}{3}$ per 3, scribendoque $a^{\frac{3}{3}}$, sive a^1, idest a. Evehes ad quartam, multiplicando exponentem $\frac{1}{3}$ per 4, scribendoque $a^{\frac{4}{3}}$, &c.

His

His rebus apparet, potestatum omnium, sive exponentem positivum habeant, sive negativum, sive integrum, sive fractum, unam eamdemque rationem esse.

Quamquam in his, quæ exponentem habent fractum, illud præcipue considerari volo. Potestas quævis, exponentem fractum habens, evehitur ad potestatem illam, quam denominator exponentis indicat, denominatore ipso abiecto. Sic potestatem $a^{\frac{2}{3}}$ ad potestatem tertiam evehes, abiiciens denominatorem 3, scribendo a^2. Etenim denominatorem 3 abiiciens perinde facis, ut si exponentem ipsum $\frac{2}{3}$ multiplicares per 3. Sic potestas $a^{\frac{3}{5}}$ evehetur ad potestatem quintam, si abiecto denominatore 5, scribatur tantum a^3.

Ea re patet, cujusvis quantitatis radicem quamlibet poni, si modo ejus exponens per eum numerum dividatur, qui genus radicis indicat. Sic quantitatis a^2 pones radicem tertiam, si scripseris $a^{\frac{2}{3}}$; quippe $a^{\frac{2}{3}}$ evecta ad potestatem tertiam efficit a^2. Sic quantitatis a^3 pones radicem quintam, si scripseris $a^{\frac{3}{5}}$; quippe $a^{\frac{3}{5}}$ evecta ad porestatem quintam efficit a^3. Quæ omnia, si attentius considerentur, verbis declarari non indigent. Ac iam res ipsa ad radices nos deduxit.

De radicum exprimendarum ratione.

DUobus modis radix quælibet cujusvis quantitatis poteſt exprimi. Primum, ſi, ut modo dixi, exponens quantitatis per eum numerum dividatur, qui genus radicis indicat. Sic radix tertia quantitatis, verbi gratia, a^2 exprimetur per $a^{\frac{2}{3}}$; radix quinta per $a^{\frac{2}{5}}$; radix ſeptima per $a^{\frac{2}{7}}$. &c.

Deinde, ſi quantitati radicale ſignum imponatur, eique ad ſiniſtram ſuperponatur numerus, qui indicat genus radicis. Sic radix tertia quantitatis a^2 exprimetur per $\sqrt[3]{a^2}$; radix quinta per $\sqrt[5]{a^2}$; radix ſeptima per $\sqrt[7]{a^2}$, &c.

Quo loco duo præſtat animadvertere. Primum. Si quantitas, quæ ſub ſigno radicali jacet, evehatur ad poteſtatem quampiam; radix etiam ipſa ad eamdem poteſtatem evecta erit. Sic evehes $\sqrt[3]{a^2}$ ad poteſtatem verbi gratia quartam, ſi ad poteſtatem quartam evexeris quantitatem a^2, ac ſcripſeris $\sqrt[3]{a^8}$. Etenim eſt certe $\sqrt[3]{a^2}$ idem atque $a^{\frac{2}{3}}$. Hanc vero ſi ad quartam poteſtatem velis evehere, ſcribes $a^{\frac{8}{3}}$, ideſt $\sqrt[3]{a^8}$. Quæ ratio manat latiſſime, valetque ad caſus omnes.

Secundo. Si radix quæpiam evehenda ſit ad poteſtatem ejus gradus, cujus radix ipſa eſt, ad id ſatis erit radicale ſignum abiicere. Sic evehes $\sqrt[3]{a^2}$ ad poteſtatem tertiam, abiicendo radicale ſignum ſcribendoque tantum a^2. & $\sqrt[5]{a}$ ad poteſtatem quintam, abiiciendo radicale ſignum, ſcribendoque tantum a. Quod ipſum manifeſtum per ſe eſt.

De

De radicibus ad idem genus reducendis.

Sint radices duæ diverſorum generum, tertia verbi gratia, uti $a^{\frac{2}{3}}$, & quinta, uti $b^{\frac{4}{5}}$. Has reduces ad idem genus, ſi exponentes ambos $\frac{2}{3}$ & $\frac{4}{5}$ ad eumdem denominatorem revocaveris, ac ſcripſeris $a^{\frac{10}{15}}$ & $b^{\frac{12}{15}}$. Sunt enim hæ radices ejuſdem generis, quippe ambæ quintæ decimæ; ac cum ſit $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, erit $a^{\frac{10}{15}} = a^{\frac{2}{3}}$, cumque ſit $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, erit $b^{\frac{12}{15}} = b^{\frac{4}{5}}$.

Quod ſi radices per radicalia ſigna expreſſæ fuerint, uti $\sqrt[3]{a^2}$, & $\sqrt[5]{b^4}$, res eodem redibit, ut per ſe ſatis patet, ſi numeros 3 & 2 multiplicaveris per 5, & viciſſim numeros 5 & 4 per 3; ac ſcripſeris $\sqrt[15]{a^{10}}$ & $\sqrt[15]{b^{12}}$; quæ ſane idem omnino ſunt, atque $a^{\frac{10}{15}}$ & $b^{\frac{12}{15}}$.

De radicibus multiplicandis.

Poteſt ſane radix quælibet per quantitatem aliam quamlibet multiplicari itidem ut quantitates omnes ſimplices. Sic multiplicabitur $\sqrt[3]{a}$ per t, ſcribendo $t\sqrt[3]{a}$; & $\sqrt[3]{a}$ per $\sqrt[5]{b}$ ſcribendo $\sqrt[3]{a}\ \sqrt[5]{b}$. Sed alia eſt etiam multiplicandi ratio, ad uſum perſæpe commodior, quæ generali hoc theoremate nititur.

Sint quantitates duæ quævis t, & u. Evehantur

tur ambæ ad poteſtatem eamdem, ac tum ſimul multiplicentur. Radix hujus producti (illa quidem, quæ ejuſdem eſt gradus, cujus eſt poteſtas, ad quam t & u evectæ ſunt) erit ſemper æqualis producto tu. Evehe t & u ad poteſtatem ſecundam, habebiſque $ttuu$, cujus producti radix ſecunda æqualis eſt, ut patet, producto tu. Evehe t & u ad poteſtatem tertiam, habebiſque $tttuuu$, cujus producti radix tertia æqualis eſt producto tu. Quæ ratio, ut facile conſtat, in infinitum abit.

Hoc poſito licebit iam radicem quamlibet, puta $\sqrt[3]{a}$, multiplicare per quantitatem quamlibet b hoc modo. Utramque evehe ad poteſtatem tertiam; habebiſque a & b^3. Igitur producto ab^3 pone radicem tertiam, ideſt $\sqrt[3]{ab^3}$. Erit hæc ſane æqualis producto ex $\sqrt[3]{a}$, & b. Eadem ratione multiplicabis $\sqrt[2]{a}$ per b, ſi utramque evexeris ad poteſtatem ſecundam, ac ſcripſeris $\sqrt[2]{ab^2}$. Item $\sqrt[4]{a}$ per b, ſi utramque evexeris ad poteſtatem quartam, ac ſcripſeris $\sqrt[4]{ab^4}$. &c.

His facile intelliges, quemadmodum poſſis quantitatem b ſub radicale ſignum coniicere, atque etiam, ſi libuerit, extra ſignum ponere. Eſt enim $b\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{ab^2}$, ideoque poteſt expreſſio altera adhiberi pro altera. Sic eſt $b\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{ab^3}$; neque minus $b\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{ab^4}$; & $b\sqrt[5]{a} = \sqrt[5]{ab^5}$, &c.

Expeditiſſima autem erit ratio multiplicandi ſimul duas radices, quæ ejuſdem ſint generis, ſi ex eo, quod modo poſui, theoremate multiplicentur.

Ad

Ad id enim ſatis erit, ſi quantitates, quæ ſub ſignis ſunt, ſimul multiplicentur, ac producto imponatur ſignum ambarum commune. Sic multiplicabis $\sqrt[2]{a}$ per $\sqrt[2]{b}$, ſi ſcripſeris $\sqrt[2]{ab}$; & $\sqrt[3]{a}$ per $\sqrt[3]{b}$, ſi ſcripſeris $\sqrt[3]{ab}$; & $\sqrt[4]{a}$ per $\sqrt[4]{b}$, ſi ſcripſeris $\sqrt[4]{ab}$, &c.

De radicibus in diviſionem venientibus.

Non eſt dubium, quin radix quæque in diviſionem ſic veniat, tamquam quantitas quævis ſimplex. Divides ergo $\sqrt[2]{a}$ per b, ſcribendo $\frac{\sqrt[2]{a}}{b}$, ſive b per $\sqrt[2]{a}$, ſcribendo $\frac{b}{\sqrt[2]{a}}$. Sed alia eſt etiam diviſionis ratio, quæ generali hoc theoremate nititur.

Sit quantitas quævis t dividenda per quamvis u. Evehantur ambæ ad eamdem poteſtatem, ac tum illa per hanc dividatur. Radix hujus fractionis (illa quidem, quæ ejuſdem gradus eſt, ac poteſtas, ad quam t & u evectæ ſunt) erit ſemper æqualis fractioni $\frac{t}{u}$. Evehe t & u ad poteſtatem ſecundam, habebiſque $\frac{tt}{uu}$, cujus fractionis radix ſecunda eſt, ut facile conſtat, æqualis fractioni $\frac{t}{u}$. Evehe t & u ad poteſtatem tertiam, habebiſque $\frac{ttt}{uuu}$, cujus fractionis radix tertia æqualis utique eſt fractioni $\frac{t}{u}$. Eaque ratio in infinitum procedit.

Hoc

Hoc posito, licebit iam radicem quamlibet, puta $\sqrt[3]{a}$, dividere per quantitatem quamlibet b. evehendo utramque ad potestatem tertiam, ponendoque fractionis $\frac{a}{b^3}$ radicem tertiam, idest $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}$; erit quippe $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{b}$. Eodemque modo dividetur b per $\sqrt[3]{a}$, si evehatur utraque ad potestatem tertiam, ac tum ponatur fractionis $\frac{b^3}{a}$ radix tertia, idest $\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}}$; erit quippe $\sqrt[3]{\frac{b^3}{a}} = \frac{b}{\sqrt[3]{a}}$.

Sic etiam divides $\sqrt[2]{a}$ per b, sive b per $\sqrt[2]{a}$; si utramque evexeris ad potestatem secundam, ac scripseris $\sqrt[2]{\frac{a}{b^2}}$, sive $\sqrt[2]{\frac{b^2}{a}}$. Erit quippe $\sqrt[2]{\frac{a}{b^2}} = \frac{\sqrt[2]{a}}{b}$, itemque $\sqrt[2]{\frac{b^2}{a}} = \frac{b}{\sqrt[2]{a}}$.

Pari ratione divides $\sqrt[4]{a}$ per b, sive b per $\sqrt[4]{a}$, si utramque evexeris ad potestatem quartam, ac scripseris $\sqrt[4]{\frac{a}{b^4}}$, sive $\sqrt[4]{\frac{b^4}{a}}$. Erit quippe $\sqrt[4]{\frac{a}{b^4}} = \frac{\sqrt[4]{a}}{b}$, itemque $\sqrt[4]{\frac{b^4}{a}} = \frac{b}{\sqrt[4]{a}}$.

Atque his rebus facile intelliges, quemadmodum possis quantitatem b sub radicale signum coniicere, atque etiam, si velis, extra ponere.

Erit etiam ex eo, quod modo dixi, theoremate ratio expeditissima dividendi radicem quamvis per quamvis aliam, si ambæ modo ejusdem sint generis.

Ad

Ad id enim satis erit, quantitatem, quæ sub signo illius est, dividere per quantitatem, quæ est sub signo alterius, fractionique imponere commune signum ambarum. Sic divides $\sqrt[2]{a}$ per $\sqrt[2]{b}$, scribendo $\sqrt[2]{\frac{a}{b}}$; itemque $\sqrt[3]{a}$ per $\sqrt[3]{b}$, scribendo $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; itemque $\sqrt[4]{a}$ per $\sqrt[4]{b}$, scribendo $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$, &c.

De quantitatibus sub vinculo positis.

Occurrunt passim quantitates quædam compositæ, quibus superstat lineola cum numero ad dexteram adiuncto, uti $\overline{a+b}^2$. Lineola dicitur vinculum; numerus 2 exponens vinculi; isque indicat potestatem, ad quam censetur evecta quantitas $a+b$, quæ sub vinculo jacet. Est ergo $\overline{a+b}^2$ idem atque $a+b$ evecta ad secundam potestatem, $\overline{a+b}^3$ idem atque $a+b$ evecta ad potestatem tertiam, &c.

Quantitates vinculo expressæ, tamquam simplices, haberi possunt; quare si sit quantitas $\overline{a+b}^2$ multiplicanda per quamvis t, id utique fiet scribendo $t \cdot \overline{a+b}^2$.

Atqui poterit etiam littera t sub vinculum conjici ad hunc modum. Dividatur exponens litteræ t per exponentem vinculi: sic $t^{\frac{1}{2}}$; tum multiplicetur per $a+b$, scribaturque $\overline{a\,t^{\frac{1}{2}} + b\,t^{\frac{1}{2}}}^2$. Est enim hoc nihil

nihil aliud, nisi potestas secunda illius producti, quod fit ex $t^{\frac{1}{2}}$ & $a+b$; hæc autem, ut facile patet, nihil est aliud, nisi potestas secunda quantitatis $t^{\frac{1}{2}}$ ducta in potestatem secundam quantitatis $a+b$, idest $t.\overline{a+b}^{2}$. Pari modo, si occurrat $t^3.\overline{a+b}^{4}$, poteris litteram t sub vinculum coniicere, scribendo scilicet $\overline{a\,t^{\frac{3}{4}}+b\,t^{\frac{3}{4}}}^{4}$; si $t^2.\overline{a+b}^{5}$, scribendo $\overline{a\,t^{\frac{2}{5}}+b\,t^{\frac{2}{5}}}^{5}$. Valet enim in omnibus par ratio.

Contra si quantitas, quæ sub vinculo jacet, ducta sit in quantitatem quampiam t, uti si occurrat $\overline{a\,t+b\,t}^{2}$, poteris, si voles, litteram t e vinculo educere, & extra ponere, modo exponentem ejus multiplices per exponentem vinculi: sic $t^2.\overline{a+b}^{2}$. Et sane si hic velis litteram t rursum sub vinculum coniicere ea ratione, quam modo docui, redibit tibi $\overline{a\,t+b\,t}^{2}$. Pari modo si occurrat $\overline{a\,t^3+b\,t^3}^{2}$, poteris litteram t e vinculo educere, scribendo scilicet $t^6.\overline{a+b}^{2}$. Si $\overline{a\,t^2+b\,t^2}^{4}$, scribendò $t^8.\overline{a+b}^{4}$, &c.

Non libuit mihi, quod multi faciunt, neque hic, neque alibi, per exempla vagari quamplurima. Tuum erit, mi Ratta suavissime, multa tibi fingere, in iisque sæpius versari; quo & regulas ipsas, præceptionesque, quas adhuc tradidi, melius intelliges, fiesque promtior ad omnia.

De

De æquationibus & præcipuis earum proprietatibus.

ÆQuatio est positio duarum quantitatum, quas æquales esse volumus. Idque significamus duabus lineolis interpositis hoc modo $a = b$, sive $ab + bc = ab$, quo ostendimus velle nos, duas quantitates a & b, sive $ab + bc$, & ab æquales inter se esse.

Quod si æqualitas posita vera est, potest æquatio multis & variis modis versari, sic utique ut æqualitas semper maneat. Quos modos juvat statim cognoscere. Ac primum si pars utraque æquationis eadem quantitate vel augeatur, vel minuatur, manet certe æqualitas; neque minus, si per eamdem quantitatem vel multiplicetur, vel dividatur. Atque etiam, si utriusque partis eadem ejusdemque generis sive potestas, sive radix ponatur. Fac enim esse $a = b$, erit sane etiam $a^2 = b^2$, & $a^3 = b^3$ &c., similiterque $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, & $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$ &c. Quæ omnia manifesta per se sunt.

His rebus facile intelliges, quemvis æquationis terminum, si ei modo signum mutetur, ad partem alteram transferri posse salva æqualitate. Verbi gratia si habueris $ab + bc = bb$ poteris terminum ab transferre ad partem alteram hoc modo $bc = bb - ab$; etenim perinde erit, ut si quantitatem eamdem ab utrique parti ademisses.

Hinc porro duo consecuntur. Primum ut, si terminorum omnium signa in æquatione mutentur, ta-

men maneat æqualitas; ideoque, si fuerit $ab - bc = cb - cc$, fit etiam $-ab + bc = -cb + cc$. Id enim perinde est, ut si unumquemque terminum utriusque partis in partem alteram transtulisses. Deinde, ut, salva æqualitate, possint termini omnino omnes in unam partem coniici; ut ex parte altera terminus nullus sit reliquus præter zerum. Itaque si habeas verbi gratia $ab + bc = aa - bb$, æqualitatem servabis ponendo $ab + bc - aa + bb = o$. Et sane, id faciens; partem alteram æquationis alteri detrahis, ac, cum æquales inter se sint, quod reliquum est, æquale zero sit, oportet.

De separanda incognita & æquatione ad id præparanda.

Atque hæc quidem eo spectant, ut certa quædam litterula, si fieri possit, ex una tantum parte relinquatur, litteris aliis omnibus in partem aliam rejectis, salva æqualitate, eaque litterula positivo signo affecta sit, nec nisi ad potestatem primam evecta.

Litterula, quæ hoc modo ab aliis secernenda est, dicitur incognita, ejusque secretio separatio incognitæ. Mos tenet, ut pro incognita sumatur littera x, aut alia quævis ex iis, quæ in communi alphabeto postremæ numerantur. Posthac igitur ubi x dixero, incognitam intelligi volo.

Sunt profecto æquationes quædam implexæ adeo im-

implicatæque, ut separandæ incognitæ spem omnem adimant; sunt aliæ, quæ, si modo præparentur, spem afferunt. Nam si x aut in fractione quapiam sedeat, aut radicali cuipiam signo subiiciatur; antequam separetur, oportebit æquationem usque eo versare dum littera x extra fractionem, & radicale quodvis signum ponatur. Atque hæc æquationis præparatio est, quæ erit persæpe expeditissima, ut præceptione vix ulla indigeat.

Sit verbi gratia æquatio $\frac{xx}{a} + b = c$. Quis statim non videt, si multiplicentur termini omnes per a, eam in hanc verti $xx + ab = ac$? Itemque si sit æquatio $b + \frac{aa}{x} = b$, eam, multiplicando terminos omnes per x, verti in hanc $bx + aa = bx$? quo erit littera x e fractione educta, salva æqualitate.

Sæpe etiam nihil negotii erit litteram x radicali signo exsolvere. Sit verbi gratia æquatio $c + \sqrt{ax} = b$, promptum erit æquationem in hanc vertere $\sqrt{ax} = b - c$, ac tum utramque partem ad potestatem secundam evehere; sic exsistet $ax = \overline{b-c}^2$, eritque x e radicali signo educta. Eademque ratione si fuerit $c + \sqrt[3]{a^2 x} = b$; eam prius in hanc vertes $\sqrt[3]{a^2 x} = b - c$; ac tum, utraque parte ad potestatem tertiam evecta, erit tibi $a^2 x = \overline{b-c}^3$.

Quod si fuerint radicalia signa duo, ut in hac

 qui-

quidem æquatione $c+\sqrt{ax}=b-\sqrt{bx}$, promptum erit ſigna ambo in unam partem coniicere, terminis aliis coniectis in partem alteram, æquationemque in hanc vertere $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}=b-c$; ac tum, ſi utramque partem quadraveris, erit tibi $ax+bx+2\sqrt{abxx}=\overline{b-c}^2$; eaque re ſigna duo ad unum redegeris, quod ſignum ea, quam ſupra oſtendi, ratione expelli poterit. Quamquam brevius, & omnino melius rem expedies, ſi cum deveneris ad æquationem $\sqrt{ax}+\sqrt{bx}=b-c$, eamdem deſcripſeris ſic: $\overline{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\sqrt{x}=b-c$. Hinc enim ſtatim ad hanc devenies $\sqrt{x}=\frac{b-c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, atque hinc ad hanc $x=\frac{\overline{b-c}^2}{a+b+2\sqrt{ab}}$. Has brevitates, uti alia hujus generis commoda, ſi qua occurrent, cognoſcere, diligentiæ erit, atque induſtriæ.

Quo modo, præparata æquatione, ſeparatio incognitæ tentanda ſit.

UBi incognita extra fractionem omnem, & radicale quodvis ſignum poſita fuerit, erit tum demum ſeparatio tentanda; cujus rei ratio eſt duplex. Etenim vel habet x in æquatione tota unam tantum poteſtatem, ſive primam, ſive ſecundam, ſive tertiam &c., vel alias in terminis aliis. Quæ duo quamvis dif-

differunt, communis tamen præceptio eſt, ut, ſi ſeparare litteram x velis, ante omnia termini illi omnes, quibus adeſt littera x, in unam partem transferantur, rejectis aliis in partem alteram.

Ea re facta, ſi habeat x unam tantum poteſtatem, ſive primam, ſive ſecundam, ſive tertiam &c., una erit, minimeque artificioſa ſeparandi ratio. Habeat x primam tantum poteſtatem, ut in hac æquatione $bx + cx = aa$. Promptum erit hanc ſic vertere $x = \frac{aa}{b+c}$; quo ſtatim x ſeparatam habes. Habeat x poteſtatem tantum ſecundam, ut in hac æquatione $axx - bxx = c^3$. Hanc quoque promptum erit ſic vertere $xx = \frac{c^3}{a-b}$; ac tum, ſi utriuſque partis radicem ſecundam poſueris, erit tibi $x = \sqrt{\frac{c^3}{a-b}}$. Haud abſimili ratione ſeparationem abſolves, ſi habuerit x poteſtatem tantum tertiam, ut in hac æquatione $ax^3 - bx^3 = c^4$, quam ſtatim ſic vertes $x^3 = \frac{c^4}{a-b}$; ac poſita utriuſque partis radice tertia, erit tibi $x = \sqrt[3]{\frac{c^4}{a-b}}$. Numquam non hoc modo procedet ſeparatio, quotieſcumque unam tantum poteſtatem habeat x, quamcumque habeat.

Iam habeat x poteſtates in aliis terminis alias; ac primum habeat tum primam, tum ſecundam, ut in hac æquatione $cxx + abx = ebb$. Hic vero ad

ſepa-

separandam incognitam tria præstanda sunt.

Primum effice, ut quadratum xx & positivum sit, & per nullam quantitatem aliam multiplicatum. Quare, cum in exemplo, quod attuli, multiplicatum sit per c, facies ne sit, dividendo terminos omnino omnes per c; vertesque æquationem in hanc $xx + \frac{abx}{c} = \frac{ebb}{c}$. Quod si sit xx negativum, id facile mutabis, si signa mutaveris terminorum omnium.

Secundo illud, quidquid est, $\frac{ab}{c}$, per quod multiplicatur x, quodque idcirco afficiens litteræ x dicitur, sepones, ac divides per 2, sic $\frac{ab}{2c}$, ejusque quadratum $\frac{a^2b^2}{4c^2}$ utrique æquationis parti adiunges; eritque iam æquatio conversa in hanc $xx + \frac{abx}{c} + \frac{a^2b^2}{4c^2} = \frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{ebb}{c}$.

Tertio demum, quoniam æquatione huc deducta, plane intelligis primam ejus partem idem esse ac quadratum summæ $x + \frac{ab}{2c}$, promptum erit utriusque partis radicem ponere sic $x + \frac{ab}{2c} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{ebb}{c}}$. Quo facto terminum $\frac{ab}{2c}$ in partem alteram transferes, ac continuo litteram x separatam habebis ad hunc modum $x = \sqrt{\frac{a^2b^2}{4c^2} + \frac{ebb}{c}} - \frac{ab}{2c}$. Quod i-

dem

dem commodius ſcribetur ſic $x = \frac{\sqrt{a^2c^2 + 4 c e b^2} - a b}{2 c}$

Habet iam x poteſtates in aliis terminis alias, eaſque cum prima, tum ſecunda altiores; hic enimvero difficultates occurrunt longe maximæ, quas vincere præceptio adhuc nulla potuit. Itaque qui hæc tradunt, illos, ubi ad hunc locum venerint, breviores facit rei ignoratio.

De argumento quodam, quod ſeparatione incognitę continetur, & ejus vi.

Æquationem tunc veram eſſe ſcio, ſi partes duæ, quibus conſtat, vere æquales inter ſe ſint. Separatio autem incognitæ, quæ per æquationes plures fit, alias ex aliis nexas, argumentum quoddam continet, quo efficitur, ut ſi ſequens æquatio vera ſit, veram quoque eſſe oporteat, quæ præceſſerit, ideoque, ſi ultima, etiam primam. Idque adeo manifeſtum eſt, ut explicatione nulla indigeat. Exempli cauſa ſit æquatio $x x - a a = b b$. Separando incognitam ad alteram æquationem venies $x x = a a + b b$; tum ad tertiam $x = \sqrt{a a + b b}$. Hic profecto ſi tertia æquatio vera ſit, ſecundam quoque veram eſſe oportet, ac ſi ſecunda, etiam primam; ergo etiam primam, ſi tertia. Et ſane ſi in æquatione prima quantitatem $\sqrt{a a + b b}$ pro x ſuppoſueris, erit æqualitas maniſeſtiſſima.

Hanc

Hanc ob caufam quantitas illa, quæ ad ultimum æqualis incognitæ x invenitur, dicitur ejus valor. Sic in exemplo, quod attuli, quantitas $\sqrt{aa+bb}$ dicetur valor incognitæ x.

Hic vero unum animadvertas, oportet. Cum, feparando incoguitam, ad radices fecundi gradus delaberis, uti a fecunda æquatione $xx=aa+bb$ cum tranfis ad tertiam $x=\sqrt{aa+bb}$; nihil refert, utrum parti alteri fignum $+$ præponas, an fignum $-$; namque utrovis modo pofueris $x=\sqrt{aa+bb}$, five $x=-\sqrt{aa+bb}$, illud nihilominus femper fequetur, ut fi æquatio tertia vera fit, fecundam quoque veram effe oporteat, ideoque etiam primam; neque argumenti vis, quod feparatione incognitæ contineri diximus, ulla ex parte minuetur.

Hoc ergo in feparanda incognita diligenter tene. Ubi ad radices devenies, utrumque fignum parti alteri adiunges, fcribefque (ne ab exemplo recedam) $x=\pm\sqrt{aa+bb}$. Quo fignificabis incognitam x duos habere valores $+\sqrt{aa+bb}$, & $-\sqrt{aa+bb}$, quorum fi utervis in æquationem primam pro x transferatur, ipfam veram reddet.

Placet idipfum exemplo altero declarare. Sit æquatio $xx-2ax=cc-aa$. Hinc fane, ut litteram x rite fepares, ad æquationem alteram venies $xx-2ax+aa=cc$; tum radices pones utriufque partis. Hic ergo utrumque fignum parti alteri adiunges hoc modo: $x-a=\pm c$. Quo facto habebis tandem

dem $x = a \pm c$; eruntque incognitæ x valores duo $a + c$, & $a - c$.

De problematis per æquationes solvendis.

Atque his quidem iam satis paratum te esse arbitror, mi Ratta suavissime, ad problemata quamplurima dissolvenda; quod studium ut ineas, non te hortabor; scio enim, te hortatore non indigere; viam tantum monstrabo; & pauca monebo, non quasi docens, sed quasi currentem incitans.

Problemate proposito ad tria statim intendes animum. Primum, ut problema ipsum ad duarum quantitatum æqualitatem referas, quam æqualitatem si possis ponere, sit tibi problematis ipsius solutio expeditissima.

Secundo, ut duas hasce quantitates denomines. Denominationes autem duces ab eis lineis, quas pertinere ad problema intelliges, earumque proprietatibus; quarum linearum quæ magnitudinis datæ erunt, constitutæque, eas appellabis a, b, c &c.; quæ data non erit, neque cujus magnitudinis ad solvendum problema esse debeat, cognoscas (cum idipsum quærendum sit) eam pro incognita habebis, & denominabis x.

Tertio. E quantitatibus duabus illis, in quarum æqualitate problematis solutio posita est, ita, ut supra dixi, denominatis, æquationem tibi finges, & in-

cognitam x ſeparabis. Ac tum ſcilicet problema tibi ſolutum erit; quippe incognitæ x valor ſatis oſtendet, cujus magnitudinis ea eſſe debeat, ut quantitates duæ illæ æquales vere ſint; ideoque problematis ſolutio ſit tibi expeditiſſima.

Atque huc ſane illud maxime pertinet, ut incognitæ valor poſſit conſtrui. Conſtruetur autem ex his, quæ alibi docui, facillime, ſi nullas niſi ſecundi gradus radices contineat; ſin radicibus implicetur aliis, erit conſtructio paulo altius repetenda; de quo dicam ſuo loco. Hic tria tantum ſcias volo.

Primum. Si valor incognitæ x negativus prodeat, ut ſi prodeat $x = -a$; tunc linea x, quam diſcedere a certo puncto, & ad certam partem dirigi tibi finxeras, erit tibi ab eodem puncto ad contrariam partem dirigenda.

Secundo. Si x duos, pluresve valores habeat, verbi gratia ſi prodierit $x = \pm\sqrt{ab}$, & ſi horum quiſque æquationem, unde omnes prodeunt, veram reddat, interdum tamen non quiſque ei problemati ſatisfaciet, quod in animo ipſe habes. Plerumque enim accidet, ut æquatio, quam poſuiſti, non illud ſolum problema exprimat, quo animum intendiſti, ſed alia etiam illi affinia, quibus ſingulis certus incognitæ valor reſpondeat, oportet. Qui autem valor problemati illi ſatisfaciat, quod tibi ipſe propoſuiſti, haud difficile erit cognitu rem paulo diligentius attendenti.

Tertio. Si valor x ſit radix ſecunda quantitatis cujuſ-

juſpiam negativæ, verbi gratia ſi prodeat $x = \pm\sqrt{-ab}$; id ſigno erit, impoſſibile illud eſſe, quod quæritur; non quod valor æquationem illam, unde prodiit, ſi in locum x ſubſtituatur, non veram reddat, ſed quia eſt ipſe abſurdus natura ſua, atque impoſſibilis.

Adſentio ego quidem exemplis hæc omnia indigere. Paucula ergo afferam, quæ, ut mea opinio eſt, eo rem magis declarabunt, quo erunt faciliora, & breviora.

EXEMPLUM I.

Problema.

DAtam rectam A B (*Fig.* 21.) ita dividere in P, ut ſint A B, A P, P B continue proportionales.

Problema hoc ſtatim refero ad æqualitatem hanc $\overline{AP}^2 = AB \cdot PB$, hac enim poſita erunt certe A B, A P, P B continue proportionales.

Sit iam data $AB = a$; incognita $AP = x$. Erit ſane $PB = a - x$, & $\overline{AP}^2 = xx$, & $AB \cdot PB = aa - ax$.

Pono igitur æquationem $xx = aa - ax$, unde, incognitam x ſeparando, prodit $x = \pm \frac{\sqrt{5aa} - a}{2}$.

Habet hic ergo x valores duos $\frac{\sqrt{5aa} - a}{2}$, &

$-\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$. Ac primum quidem valorem $\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$ facile conftat pofitivum effe; quipe quantitas $\sqrt{5aa}$, quæ ponitur, major eft, quam a, quæ negatur. Neque minus facile intelligitur effe $\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$ minorem, quam a, ideft A B. Omnino conftat, fi fumatur $AP = \frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$, per hunc valorem plane fatisfactum iri problemati, quod propofuimus.

Valor alter $-\frac{\sqrt{5aa}-a}{2}$, dubium non eft, quin negativus fit, fitque ad partem contrariam dirigendus fumendo $AQ = \frac{\sqrt{5aa}+a}{2}$, quod ubi feceris, habebis Q B, Q A, A B continue proportionales, quod fane valde affine eft rei illi, quæ quærebatur.

EXEMPLUM II.

Problema.

IN dato circulo A M B Q, (*Fig.* 22.) cujus diameter A B, centrum C, infcribere triangulum æquilaterum A M Q.

Problema hoc ad æqualitatem fic refero. Non eft

eſt dubium, quin, ſi inveniatur in diametro punctum P tale, ut ducta perpendiculari P M, quæ ſecet circulum in M, ductaque A M, ſit $AM = 2PM$, non eſt, inquam, dubium, quin ſit trianguli æquilateri inſcriptio expeditiſſima. Siquidem producta M P donec ſecet circulum in Q, ductaque A Q, facile conſtat æqualia eſſe latera omnia A M, M Q, A Q.

Sit iam C B, ſive $CA = a$; $CP = x$. Erit $AP = a + x$; $PB = a - x$; P M (media proportionalis inter A P, & P B) $= \sqrt{aa - xx}$, ideoque $2PM = 2\sqrt{aa - xx}$. Erit autem A M (hypotenuſa in triangulo A P M) $= \sqrt{2aa + 2ax}$.

Pono ergo æquationem $\sqrt{2aa + 2ax} = 2\sqrt{aa - xx}$. Utramque partem quadro, tum ſeparo incognitam x, ac prodit $x = \pm \frac{3a - a}{4}$.

Hic igitur habet x valores duos $\frac{3a - a}{4} = \frac{a}{2}$, & $-\frac{3a - a}{4} = -a$. Non eſt dubium, quin primus valor $\frac{a}{2}$ problemati ſatisfaciat, ſitque futurum triangulum A M Q æquilaterum, ſi ſumſeris C P æqualem dimidio radio, ideſt $\frac{a}{2}$.

Valor alter $-a$ e contraria parte ſumendus erit, eritque æqualis radio, ideſt a, ideoque punctum P cadet in A. Quod ſi rem ſpectes, hic quoque valor problemati ſatisfaciet. Cadente enim P in A, erit P M zerum; totumque triangulum A M Q,

&

& singula ejus latera zerum erunt, ideoque omnia æqualia. At enim de hujusmodi triangulo quis quærat? Nemo quisquam. Valor tamen a veritate minime aberrat.

EXEMPLUM III.

Problema.

DAtam lineam AB ita dividere in Q, [*Fig.* 23.] ut rectangulum ex AQ & QB æquale sit quadrato lineæ AB.

Hinc sine ullo artificio ipsa se prodit æqualitas. Sit ergo $AB = a$; $AQ = x$. Erit $QB = a - x$. Ideoque rectangulum ex AQ & QB erit $= ax - xx$. Pono igitur æquationem $ax - xx = aa$. Separando incognitam x, prodit $x = \frac{a \pm \sqrt{-3aa}}{2}$.

Habet igitur x valores duos $\frac{a + \sqrt{-3aa}}{2}$, & $\frac{a - \sqrt{-3aa}}{2}$, utrumque, ex absurda radice illa $\sqrt{-3aa}$, impossibilem. Quo patet impossibile id esse, quod quæritur.

De

De divisionibus æquationum, & problematum variis.

HIc vero de nominibus magis, quam de rebus agetur, ut fere fit, cum res in partes dividuntur. Æquatio quævis ejus gradus esse dicitur, quem maximum habet potestas incognitæ. Quare si in æquatione non nisi primam potestatem habet incognita, ut in hac $bx + cc = cx$, æquatio dicitur primi gradus, vel etiam linearis.

Si incognita in æquatione secundam habet potestatem, ut in hac $xx - ac = bb$, æquatio dicitur secundi gradus, vel etiam quadratica. Quod si & secundam potestatem habeat incognita, & etiam primam, ut in hac æquatione $xx + aa = bb - bx$, æquatio dicetur quadratico-affecta.

Si habuerit incognita potestatem tertiam, ut in hac æquatione $x^3 + ax^2 = c^3$, dicetur æquatio tertii gradus, vel etiam cubica. Quod si incognita habuerit potestatem quartam, dicetur æquatio quarti gradus; si quintam, quinti &c.

Problema quodvis ejus gradus esse dicitur, cujus gradus est æquatio illa, per quam solvitur. Dicuntur etiam problemata, alia determinata, alia indeterminata, quæ partitio est explicanda.

Si in æquatione, per quam problema solvitur, præter incognitam x, litteræ aliæ omnes a, b, c &c. quantitates exprimant certæ constitutæque magnitudinis, quam variare nullo modo liceat, problema de-

determinatum dicitur. Hujus generis illa sunt, quæ paulo ante in exemplum attuli.

Quod si in æquatione, præter x, alia quæpiam sit littera, puta y, quæ qua sit magnitudine, ad solvendum quidem problema, nihil referat; problema dicitur indeterminatum. Rem diligentius declaremus.

Datis rectis A B, B C (*Fig.* 24.) datum angulum A B C efficientibus, quæratur punctum M, a quo si ducatur recta M P parallela ad C B, secansque A B in P, sit A P, P M :: A B, B C. Erit hoc problema indeterminatum.

Fac enim $AB = a$, $BC = b$, $AP = x$, $PM = y$. Problemati satisfactum plane erit, si modo fuerit $bx = ay$. Ut sit autem $bx = ay$, nihil refert, qua sit magnitudine aut x, aut y, modo altera sic se habeat ad alteram, ut vera sit æquatio $bx = ay$, id quod obtineri poterit variando vel x, vel y infinitis modis.

Sume enim x tamquam incognitam, eamque separa. Erit tibi $x = \frac{ay}{b}$. Hic cujusque magnitudinis ponatur y, modo fiat $x = \frac{ay}{b}$, erit utique $bx = ay$. Rursum sume y tamquam incognitam, eamque separa. Erit tibi $y = \frac{bx}{a}$. Atque hic etiam cujuscumque magnitudinis ponatur x, modo fiat $y = \frac{bx}{a}$, erit utique $bx = ay$. Sic variari infinitis modis poterunt tum

tum x tum y, & infinita puncta M inveniri, quæ problemati satisfacient.

Quantitates, quæ infinitis modis variari poterunt, dicuntur variabiles, eæque ultimis alphabeti litteris x, y, z solent exprimi. Quantitates aliæ dicuntur constantes.

Infinita illa puncta M, quæ problemati satisfaciunt, lineam ostendunt, quæ locus dicitur. Æquatio autem unde illa prodierunt, æquatio dicitur ejus loci, sive ad eum locum.

Linea x, quæ scilicet a certo puncto A ducitur, abscissa dicitur; y vero ordinata; ea vero, in qua x sumitur, axis dici solet.

Non est dubium quin linea recta A C (ut in proposito exemplo maneam) in infinitum producta locus ille sit, ad quem est æquatio $bx = ay$. Quod per raro accidit, ut locus sit linea recta; plerumque enim est curva quæpiam linea, pro æquationis varietate, varia; ac licet curvæ infinitæ prodire possint, eæque inter se diversissimæ, persæpe tamen in eas incides, quæ sunt geometris familiarissimæ, notissimæque; cujus rei exemplum unum afferam.

EXEMPLUM.

Problema.

Data recta A B (*Fig.* 25.) invenire extra ipsam punctum M, a quo si ducatur M P perpendicularis ad A B, sit $\overline{PM}^2 = AP \cdot PB$.

 Sit

Sit data $AB = a$; $AP = x$. Erit $PB = a - x$, & $AP \cdot PB = ax - xx$. Sit $PM = y$; quare $\overline{PM}^2 = yy$. In problemate, uti quidem propositum est, nihil aliud quæritur, nisi ut vera sit æquatio $yy = ax - xx$, quæ si vera fuerit, nihil refert, qua magnitudine sit aut x, aut y. Problema est igitur indeterminatum, infinitasque habet solutiones.

Fac enim separes y. Erit tibi $y = \pm\sqrt{ax - xx}$; ubi quantumcumque varies lineam x, dummodo semper ponas $y = \pm\sqrt{ax - xx}$, vera erit æquatio $yy = ax - xx$.

Vel etiam fac separes x. Erit tibi $x = \frac{a \pm \sqrt{aa - 4yy}}{2}$, ubi quantamcumque posueris y, dummodo semper ponas $x = \frac{a \pm \sqrt{aa - 4yy}}{2}$, numquam non vera erit æquatio $yy = ax - xx$.

Erunt ergo infinita puncta M, quæ problemati satisfacient; ac si locum diligentius inspexeris, facile invenies, eum esse curvam lineam, notissimam, nobilissimamque inter omnes, cui circulo nomen est.

Atque hæc de æquationibus dixisse in præsens satis sit, quæ cum perceperis, quod tibi, mi Ratta perfacile erit, tum ad ea, quæ penitiora sunt, æquationumque naturam atque usum maxime illustrant, accedemus.

DE

DE VARIIS ÆQUATIONUM PROPRIETATIBUS.

Definitiones & postulata quædam,

Nunc varias æquationum proprietates exsequar. Sed ante omnia æquationem ipsam ita præparari volo, ut hæc habeat.

I. Primum termini omnes in unam partem conjecti sint. Incognita x nullo radicali signo adstricta. Quantitates reliquæ a, b, c &c. reales sint; quales utique semper erunt. Quis enim imaginarias consulto invehat?

II. Primo loco terminus ille sit positus; in quo x maximam habet potestatem; isque positivo signo affectus, coefficiente nullo præterquam 1. Primum hunc terminum sequantur alii eo ordine, quo incognitæ potestas minuitur, donec ad eum veniatur, in quo x apparet nulla. Exemplo sit $x^3+a\,x^2+b^2\,x+q=0$. Hic est x^3 primus terminus; $a\,x^2$ secundus; $b^2\,x$ tertius; q vero, ubi nulla apparet x, dicitur terminus ultimus.

Quo loco duo præcipienda sunt. Primum. Si qua in æquatione plures sint termini, in quibus x ad eamdem potestatem evecta sit, summam omnium pro uno termino habebis. Occurrat æquatio $x^3+a\,x^2+b^2\,x+c\,x^2+q=0$; terminos $a\,x^2$, & $c\,x^2$ pro uno habebis, æquationemque sic scribes commodissime $\begin{matrix} x^3+a\,x^2+b^2\,x+q=0 \\ +c\,x^2 \end{matrix}$. Deinde. Si æquatio oc-

 cur-

currat, in qua terminus quiſpiam deſideretur, hunc adeſſe putabis multiplicatum per zerum. Occurrat æquatio $x^3 + b^2 x + q = o$, in qua terminus ſecundus deſideratur; hunc ergo putabis adeſſe, neque incommode ſcribes $x^3 + o x x + b^2 x + q = o$.

III. Quantitas quævis cognita, quocumque in termino per incognitam multiplicetur, dicitur coefficiens illius termini.

IV. Æquatio quæque dicitur eſſe ejus gradus, cujus gradus eſt poteſtas maxima incognitæ. Erit ergo $x - b = o$ æquatio primi gradus; $x x + u = o$ ſecundi; $x^3 + a x + p = o$ tertii &c. Quamquam æquatio primi gradus dicitur etiam linearis; ſecundi quadratica, ac ſi adſit ſecundus terminus, etiam quadratica affecta; tertii, etiam cubica.

V. Valor incognitæ x eſt quantitas illa cognita, quæ ſi in æquatione pro x ſubſtituatur, ſumma terminorum omnium evadit zerum. Sic in æquatione $x x + 2 a x + a a = o$, ſi pro x ſubſtituas $-a$, ſumma terminornm omnium evadet zerum. Erit ergo $-a$ in hac æquatione valor incognitæ x, diceturque verificare æquationem. Sunt qui valores incognitæ radices æquationis vocent; quam apte nihil opus eſt quærere.

VI. Binomium vocabo incognitam ſimplicem, cui quæpiam cognita adiuncta ſit, uti $x + a$, $x - b$. Si æquatio uno binomio conſtet, puta $x + a = o$, ſatis patet, valorem incognitæ x non alium eſſe poſſe, niſi cognitam illam a mutato ſigno, ideſt $-a$;

nam

nam $-a+a$ vere æquat zerum; neque vero alia quantitas, præter $-a$, præstare id potest. Sic etiam in æquatione $x-b=o$ non alius valor esse potest incognitæ x, nisi $+b$.

VII. Si duæ pluresve æquationes, quarum unaquæque binomio uno constet, puta $x-a=o$, $x-b=o$, simul multiplicentur, unde existat æquatio una, puta $xx-ax+ab=o$; hanc æquationem
$-bx$
productam appellabo; illas producentes. Adhuc definitiones, & postulata quædam exposui. Quæ secuntur propositionibus paucis complectar.

Prop. I.

In æquatione producta habet x valores eos, quos habet in producentibus; neque ullos alios habere potest. Nam primum. Sint ex. gr. producentes duæ $x-a=o$, $x-b=o$. Si hic pro x substituatur vel a, vel b, alterum binomiorum evadet zerum; ergo in æquatione producta habebit x valores duos a, & b, quos nempe habet in producentibus. Deinde. Quidquid ponatur pro x in producentibus præter a & b, binomia ambo $x-a$, $x-b$, aliquid semper erunt; neutrum abibit in zerum; ergo ne ipsorum quidem productum; ergo ne æquatio quidem producta. Ergo in æquatione producta nullum valorem habere potest x nisi a, & b. Eadem valebit ratio, quotquot sint producentes.

Prop. II.

UT æquatio producta nullum præ se ferat imaginarium, ut supra postulavimus, oportet, ut si altera producens habet imaginarium quodpiam, uti $x+\sqrt{-c}$; producens altera habeat idem imaginarium cum signo opposito, uti $x-\sqrt{-c}$. Nam si ita est, multiplicando binomia, imaginarium evanescet, nullumque imaginarium præseferet æquatio producta, quemadmodum supra postulavimus; sin minus, persistet imaginarium, ac se ostendet in æquatione producta, contra quam postulavimus.

Coroll.

HInc illud satis patet. Si in æquatione producta valor quipiam incognitæ x sit imaginarius, erit etiam alter valor; neque esse poterunt valores imaginarii, nisi numero pares.

Prop. III.

SI æquationes producentes duæ sint, potestas maxima incognitæ x erit duorum graduum; si tres, trium; & sic deinceps. Id ipsa multiplicationis ratio facile ostendet. Exempla duo afferam.

Exemplum primum. Sint producentes duæ $x-a=0$,

$x=$

$x - b = o$, erit producta $\begin{array}{l} xx - ax + ab = o. \\ \quad\;\; - bx \end{array}$ Potestas maxima incognitæ est duorum graduum.

Exemplum alterum. Sint producentes tres $x - a = o$, $x - b = o$, $x - c = o$. Erit producta

$$\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx - abc = o. \\ \quad\;\; - bx^2 + acx \\ \quad\;\; - cx^2 + bcx \end{array}$$

Potestas maxima incognitæ trium est graduum.

Prop. IV.

IN æquatione producta tot valores habet x, quot sunt gradus, ad quos potestas ejus maxima evecta est: nam tot certe habet valores, quot habet in æquationibus producentibus; qui valores tot sane sunt, quot producentes ipsæ: atqui quot sunt producentes, tot etiam sunt gradus, ad quos evehitur potestas maxima incognitæ x in æquatione producta; ergo in æquatione producta tot valores habet x; quot sunt gradus, ad quos potestas ejus maxima evecta est.

Prop. V.

IN æquatione producta coefficiens secundi termini est summa valorum omnium, signis mutatis. Id ipse multiplicationis ordo ostendit. Vide exemplum primum,

mum, quod supra attuli. Valores sunt $+a$, $+b$. Coefficiens secundi termini est $-a-b$. Vide exemplum alterum. Valores sunt $+a$, $+b$, $+c$. Coefficiens secundi termini est $-a-b-c$.

Prop. VI.

IN æquatione producta coefficiens tertii termini continet summam productorum, quæ fiunt e binis quibusque valoribus, si singuli in se multiplicentur. Id etiam ipsa multiplicationis ratio manifestum faciet, si attentius inspiciatur. Refer te ad exemplum alterum, quod supra attuli. Cum valores sint tres a, b, c, etiam bini sint tres oportet, a & b, a & c, b & c. Si binos singulos in se multiplices, erunt producta ab, ac, bc. Et vero coefficiens tertii termini habet $ab+ac+bc$.

Neque minus ordo ipse multiplicationis ostendet, si quartus adsit terminus, ejus coefficientem continere producta ternorum; si quintus, quaternorum, &c.

Prop. VII.

IN æquatione producta ultimus terminus numquam non continet productum valorum omnium. Id facile ostendit multiplicationis ratio. Refer te ad exempla, quæ supra attuli. In primo valores sunt a & b; ultimus terminus est ab. In altero valores sunt a, b, c; ultimus terminus est abc.

Prop.

Prop. VIII.

Sit proposita æquatio quævis secundi gradus, puta $xx + ax + b = o$. Finge tibi duas quantitates δ, & θ, qualescumque eæ sint, quarum summa æquet a coefficientem secundi termini; productum vero æquet b ultimum terminum. Dico, æquationem propositam esse productam ex duabus $x - \delta = o$, $x - \theta = o$. Etenim si hæ duæ per se mutuo multiplicentur, producetur sane æquatio, quæ erit plane eadem, atque æquatio proposita $xx + ax + b = o$.

Haud absimili ratione ostendes, æquationem quamlibet propositam tertii gradus, puta $x^3 + ax^2 + bx + c = o$ productam esse ex tribus $x - \delta = o$, $x - \theta = o$, $x - \omega = o$, si quantitates δ, θ, ω tibi fingas, ut oportet.

Pari modo procedes ad æquationes alias quaslibet cujusvis gradus.

Scholion.

Cum æquatio, quam in exemplum supra adhibui, $xx + ax + b = o$ sit plane eadem, atque illa, quæ producitur ex duabus $x - \delta = o$, $x - \theta = o$; in hac autem non possit x habere valores alios nisi δ, & θ; sic etiam in illa habebit x valores duos, qui nulli alii esse poterunt, nisi quos finximus, δ, & θ.

Atque id pari ratione transferes ad æquationes

 alias

alias omnes, quæcumque proponantur, cujufvis gradus fint.

Hifque facile intelliges, ea, quæ adhuc diximus de æquatione producta, & de producentibus, in æquationes convenire omnino omnes.

Probl. I.

PRopofitam æquationem quamlibet, in qua x habeat valores quoslibet P, Q, R &c., in aliam convertere, in qua x habeat eofdem valores P, Q, R &c., eofque five multiplicatos per quantitatem datam c, five divifos; five auctos quantitate data c, five imminutos. Id in uno exemplo feciffe fatis erit.

Sit ergo propofita æquatio $xx + ax + b = o$, in qua habeat x valores P & Q. Pars prima. Pro x fupple $\frac{x}{c}$. Æquatio in hanc transformabitur $\frac{xx}{cc} + \frac{ax}{c} + b = o$, in qua $\frac{x}{c}$ (fi pro incognita habeatur) eofdem habebit valores P, Q, quos habet in æquatione propofita x. Erit ergo in æquatione transformata $\frac{x}{c} = \text{P}$, & $\frac{x}{c} = \text{Q}$; ergo erit $x = c\text{P}$, & $x = c\text{Q}$. Ergo habebit x valores P, Q multiplicatos per c.

Pars fecunda. Pro x fupple cx. Æquatio in hanc transformabitur $c^2x^2 + acx + b = o$, in qua cx habebit certe valores P, Q; eritque $cx = \text{P}$, & $cx = \text{Q}$; ergo

ergo erit $x = \frac{P}{c}$, & $x = \frac{Q}{c}$. Habebit ergo x valores P, Q divifos per c.

Pars tertia. Pro x fupple $x - c$. Æquationem tibi facies, in qua erit $x - c = P$, nec non $x - c = Q$, ideoque $x = P + c$, & $x = Q + c$. Habebit ergo x valores P, Q auctos quantitate data c.

Pars quarta. Pro x fupple $x + c$. Æquationem tibi facies, in qua erit $x + c = P$, nec non $x + c = Q$, ideoque $x = P - c$, & $x = Q - c$. Habebit ergo x valores P, Q imminutos quantitate data c.

Scholion.

SI intellexeris, quos valores habeat x in æquatione transformata, nihil negotii erit cognofcere, quos habeat valores in æquatione propofita.

Probl. II.

PRopofita æquatione quavis, cui fit fecundus terminus, hanc in aliam vertere, quæ fecundo termino careat; eaque fit, ut in ipfa habeat x valores eofdem, quos habet in æquatione propofita, vel auctos quantitate quapiam data, vel imminutos. Id uno exemplo planum fiet.

Sit æquatio $xx + ax + b = 0$. Sume coefficientem a fecundi termini, eique fignum muta, tum di-

vide per 2, nempe per eum numerum, qui gradum æquationis ostendit, ut jam habeas $-\frac{a}{2}$ Jam ergo in proposita æquatione, pro x substitue $x-\frac{a}{2}$; habebisque æquationem, quæ carebit secundo termino. Idque debere necessario fieri facile intelliges, si substitutionis ordinem attentius inspexeris. Ubi vero secundum terminum hoc modo eliminaveris, habebit x in æquatione, quæ prodierit, valores eosdem, quos habet in æquatione proposita, auctos quantitate $\frac{a}{2}$.

DE

DE ÆQUATIONIBUS RESOLVENDIS.

PRius quam ad rem venio, intelligas volo, quo modo tentari divifio poffit in quantitatibus compofitis; quod enim in prima algorithmi parte præcepi, ut diviforem dividendo fubfcriberes interiecta lineola, id habet fignificationem divifionis quamdam, non divifionem ipfam, quam tentare interdum convenit, fi forte poffit peragi. De hoc ergo dicamus.

De divifione in quantitatibus compofitis.

UNo exemplo rem abfolvam. Sit divifor,

$$aa + bc$$

dividendum

$$a^4 + ab^2c + a^2bc + a^3b - a^2bx - b^2cx$$

Sume e dividendo terminum a^4, in quo fcilicet littera a maximam habet poteftatem. Tunc fume e divifore terminum aa, in quo fcilicet littera eadem a poteftatem habet maximam. Illum per hunc divide. Quotum invenies aa. Hunc quotum multiplica per diviforem, ac terminos, qui hinc fient, fubtrahe dividendo. Ea re facta, dividendum reliquum erit $abbc + a^3b - a^2bx - b^2cx$. Hoc reliquum tracta eodem modo.

Sume

Sume $a^3 b$; hunc divide per $a\,a$. Quotum invenies $a\,b$. Hunc quotum multiplica per divisorem $a\,a + b\,c$, ac terminos, qui hinc fient, subtrahe dividendo. Ea re facta, dividendum reliquum iam erit $-\,a\,a\,b\,x - b\,b\,c\,x$. Rursus hoc reliquum eodem modo tracta.

$\frac{a^4}{a\,a}$	$a\,a$
$\frac{a^3 b}{a\,a}$	$a\,b$
$\frac{-\,a^2 b\,x}{a\,a}$	$-\,b\,x$

Sume $-\,a\,a\,b\,x$; hunc divide per $a\,a$. Quotum invenies $-\,b\,x$. Hunc quotum multiplica per divisorem $a\,a + b\,c$, ac terminos, qui hinc fient, subtrahe dividendo. Ea re facta, cum dividendi nihil sit reliquum, divisio absoluta erit, eritque inventorum quotorum summa $a\,a + a\,b - b\,x$ quotus ille, qui quærebatur. Et sane si hæc summa per divisorem $a\,a + b\,c$ multiplicetur, restituet dividendum.

Persæpe eo devenies, ut quod reliquum dividendi erit, dividi ulterius non possit; ut si dividendo, quod supra proposui, adjunctus fuisset terminus $t\,t\,c\,c$; nam facta divisione ut supra, reliquum tandem esset $t\,t\,c\,c$, quod dividi per divisorem $a\,a + b\,c$ non potest.

Id si accidat, ad summam quotorum inventorum fractionem addes hoc modo; $a\,a + a\,b - b\,x + \frac{t\,t\,c\,c}{a\,a + b\,c}$; eritque hic quotus absolutus. Quod si quotus obtinebitur sine fractione ulla, divisio perfecta dicetur; imperfecta, si fractionem habuerit. Sed iam de his satis multa.

De

De resolutione æquationum generatim.

REsolvi æquationem dico, cum valores incognitæ ex ipsa educuntur. Quemadmodum id fiat in æquationibus vel primi vel secundi gradus, credo me tibi alias exposuisse. Nunc pauca monebo, primum de æquationibus generatim, tum præcipue de æquationibus tertii gradus, ac de casu illo, quem irreducibilem vocant. Sed iam de resolvendis æquationibus generatim dicamus.

Primum. Si incognita x eamdem ubique potestatem habeat; ut si proponatur æquatio $a x^5 + b b c^3 - t x^5 = o$, nihil erit expeditius, quam æquationem resolvere. Ubi enim feceris $a x^5 - t x^5 = - b b c^3$, tum $x^5 = - \frac{b b c^3}{a - t}$, pones radicem quintam utriusque partis sic $x = \sqrt[5]{\frac{- b b c^3}{a - t}}$, eritque hic valor incognitæ x. Hoc exemplo uti poteris ad casus omnes.

Secundo. Si incognita non nisi duas potestates habeat, alteram alterius duplam, ut si proponatur $x^4 - a b = a x^2 + q$, æquationem tractabis, tamquam esset quadratica affecta, eritque persæpe resolutio paratissima. Ne ab exemplo discedam. Pone, uti sit in quadraticis $x^4 - a x^2 = a b + q$, & parti utrique adde $\frac{a a}{4}$ sic $x^4 - a x^2 + \frac{a a}{4} = \frac{a a}{4} + a b + q$. Quoniam pars prima est procul dubio quadratum, cujus ra-

radix est $xx - \frac{a}{2}$, pones utriusque partis radicem: sic $xx - \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + ab + q}$; tum $xx = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + ab + q}$; ac iam resolutio in promptu erit. Pones nimirum $x = \pm \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{aa}{4} + ab + q}}$; qui erit valor incognitæ x.

Tertio. Si senseris, æquationem resolvendam produci ex duabus per se invicem multiplicatis, erit interdum resolutio expeditissima. Res exemplo declaranda. Proposita sit æquatio $abxx - ac + bx^3 - cx = o$. Forte sentis, eam productam esse ex his duabus $a + x = o$, & $bxx - c = o$. Harum igitur utramque resolve. E prima habebis $x = -a$; ex altera $x = \pm \sqrt{\frac{c}{b}}$; eruntque hi valores incognitæ x in æquatione proposita. Nam quivis horum valorum substituatur pro x, evadet zerum vel $a + x$, vel $bxx - c$; quare cum æquatio proposita ex his duabus per se invicem multiplicatis producta sit, ipsa quoque evadet zerum.

Scholion.

NUnquam non juvabit cognoscere, an æquatio resolvenda producatur ex aliis, quæque hæ sint, id, quod divisio manifestabit. Sic enim æquatio in æqua-

quationes plures discerpi poterit, eritque in singulis potestas incognitæ x depressior; eoque erit resolvendi spes major.

De resolutione æquationum tertii gradus.

RΕsolvendæ æquationis tertii gradus, si adsit secundus terminus, spes est vix ulla. Igitur, si adsit, ante omnia eliminandus est, quod quemadmodum fiat, supra docui; ac tum spes erit aliqua in mirabili Cardani methodo, quam cursim attingam.

Proposita sit æquatio $x^3 - px - q = o$. Sunt p & q duæ quævis datæ. Pro x supple summam duarum incognitarum $y + z$. Vertetur æquatio in hanc $y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 - py - pz - q = o$, in qua sane summa $y + z$ (si pro incognita accipiatur) eosdem habebit valores, quos habet x in æquatione proposita.

Hinc sume terminos quatuor $3zyy + 3zzy - py - pz$. (*In additis vide Notam I.*) Fac hos æquales zero; elicies $y = \frac{p}{3z}$. Quare si ponatur $\frac{p}{3z}$ pro y, quatuor illi termini evadent zerum.

Sume tres reliquos terminos $y^3 + z^3 - q$. Fac hos pariter æquales zero. Elicies nempe $y = \sqrt[3]{q - z^3}$. Quare si ponatur $\sqrt[3]{q - z^3}$ pro y; termini illi tres evadent zerum.

Iam ergo si ponantur æquales $\frac{p}{3z}$, & $\sqrt[3]{q - z^3}$,

cum quatuor illi termini, tum hi tres simul omnes evadent zerum.

Pone igitur $\frac{p}{3z} = \sqrt[3]{q - z^3}$. (*Vide Notam II.*)

Hinc elicies $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$. Quare si ubique hoc ponas pro z, hæc sequentur. Primum valor incognitæ y, qui erat $\sqrt[3]{q - z^3}$, evadet
$\sqrt[3]{q - \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$, sive $\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$.
(Ubi illud animadvertas velim: quoniam in formando valore $\sqrt[3]{q - z^3}$ negari debet z^3, idcirco si in valore z^3 ponas $+ \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, in formando valore $\sqrt[3]{q - z^3}$ ponendum erit $- \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, & contra). Deinde valores duo incognitæ y, idest $\frac{p}{3z}$, & $\sqrt[3]{q - z^3}$ fient æquales, omnesque omnino termini æquationis $y^3 + 3zyy$ &c. evadent zerum. Quare valor summæ $y + z$ in hac æquatione erit
$\sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$.
Erit ergo etiam in æquatione proposita

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Eoque iam æquationem propositam resolutam habes.

Sco-

Scholion.

SUspectam diu fecit Cardani methodum hæc ratio. Si fuerit $\frac{p^3}{27}$ majus, quam $\frac{qq}{4}$, erunt sane ambæ illæ radices cubicæ imaginariæ; ergo, ajebant, & illarum summa, idest valor incognitæ x erit imaginarius. In hoc autem fallaciæ quidpiam inesse sic ostendebant. Pone æquationem $x^3 - 7x - 6 = 0$. Hic cum sit $p = 7$, & $q = 6$, erit sane $\frac{p^3}{27}$, idest $\frac{7 \cdot 7 \cdot 7}{27}$ majus quam $\frac{qq}{4}$, idest $\frac{6 . 6}{4}$: ideoque incognitæ x valor per Cardani methodum erutus erit imaginarius. Atqui tamen in hac æquatione non habet x nisi valores tres -1, -2, $+3$, qui reales sunt omnes. Innumerabilia hujusmodi exempla afferri possunt.

Verum hæc ratio nullius momenti est. Fieri enim potest, ut duæ quantitates imaginariæ ambæ sint, illarum autem summa realis. Imaginariæ sunt ambæ $a + \sqrt{-c}$, & $b - \sqrt{-c}$, illarum summa realis est, elidentibus se mutuo imaginariis. Quamvis ergo radices duæ illæ cubicæ imaginariæ sint, non recte colligitur, etiam illarum summam, idest valorem incognitæ x, esse imaginariam. Fortasse si radices illæ duæ re ipsa possent extrahi, extractæque in summam redigi, inveniretur hæc summa realis, imaginariis se invicem elidentibus. Idque ita esse demonstrat Nico-

lius in Parisiensis Academiæ Actis, radices ambas in infinitas series convertens. Ego idem ostendisse mihi videor in Academiæ nostræ actis vel sine seriebus.

Quoniam valor incognitæ x, e Cardani methodo expressus, si imaginariis implicitus sit, numquam eo reduci potuit, ut imaginariis exsolveretur omnibus, idcirco casus ille irreducibilis dictus est.

Scholion alterum.

Quo apertior Cardani methodus fiat, certiorque, juvat eam traducere ad æquationem quadraticam simplicissimam. Sit æquatio $xx - p - q = o$. Sunt p & q duæ datæ quævis; valoresque incognitæ x duo sunt $+\sqrt{p+q}$, & $-\sqrt{p+q}$, reales ambo.

Eruatur iam valor incognitæ x Cardani more. Pro x supple $y+z$. Vertetur æquatio in hanc $yy + 2zy + zz - p - q = o$. Pone $2zy - p = o$. Elicies $y = \frac{p}{2z}$. Pone $yy + zz - q = o$. Elicies $y = \pm\sqrt{q - zz}$.

Pone iam $\frac{p}{2z} = \sqrt{q - zz}$. Elicies

$z = \pm\sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}}$. Ac si in valore incognitæ y, idest $\sqrt{q - zz}$ pones valorem hunc incognitæ

z.,

z, habebis $y = \pm \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}}$, eritque $y + z$, ideoque x in propoſita æquatione ſic $y + z = x =$ $\pm \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}} \pm \sqrt{\frac{q \pm \sqrt{qq - pp}}{2}}$.

Neque ſane dubitari poteſt, quin ſit in æquatione, $xx - p - q = 0$ valor incognitæ x is, qui inventus modo eſt; nempe $\sqrt{\frac{q - \sqrt{qq - pp}}{2}} \pm \sqrt{\frac{q + \sqrt{qq - pp}}{2}}$; etenim ſi hoc totum quadrabis, prodibit $p + q$; idque poſitum pro xx in æquatione $xx - p - q = 0$ eam perbelle verificabit.

Cum ſit vero radix utraque imaginaria, ſi ſit p majus quam q, ſummam tamen numquam non realem eſſe oportet; eſt enim ipſa valor incognitæ x, quæ valores tantum habet reales.

Hæc ſcripſi, mi Ratta ſuaviſſime, fortaſſe obſcurius, quam res ipſa poſtulabat, confiſus ſcilicet diligentia tua, quæ facit ſæpe, ut ſim ipſe in ſcribendo negligens.

AD-

ADDITA.

Nota I.

Ex æquatione $3zyy+3zzy-py-pz=0$ facile huc devenies $yy+zy-\frac{py}{3z}=\frac{p}{3}$, five $yy+\frac{3zzy-py}{3z}=\frac{p}{3}$. Hic de more fume $\frac{3zz-p}{3z}$ ac divide per 2, tum quadra, & quadratum adde utrique parti. Habebis iam $yy+\frac{3zzy-py}{3z}+\frac{9z^4-6zzp+pp}{36zz}=\frac{9z^4-6zzp+pp}{36zz}+\frac{p}{3}=\frac{27z^4+3pp+18zzp}{3.36zz}$, five $yy+\frac{3zzy-py}{3z}+\frac{9z^4-6zzp+pp}{36zz}=\frac{9z^4+6zzp+pp}{36zz}$. Adverte, hanc partem ultimam effe quadratum fummæ $\frac{4zz+p}{6z}$. Quare, extrahendo radicem de more ex utraque parte, habebis $y+\frac{3zz-p}{6z}=\pm\frac{3zz+p}{6z}$. Unde facile erues $y=\frac{p}{3z}$, & $y=-z$.

Nota II.

Ex æquatione $\frac{p}{3x}=\sqrt[3]{q-x^3}$ ftatim huc devenies

nies $\frac{p^3}{27 \cdot z^3} = q - z^3$, ſive $p^3 = 27 q z^3 - 27 z^6$, ſive $z^6 - q z^3 = -\frac{p^3}{27}$. Tractando hanc tamquam quadraticam, habebis $z^6 - q z^3 + \frac{qq}{4} = \frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}$; unde $z^3 - \frac{q}{2} = \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, ac demum $z^3 = \frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}$, et $z = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{qq}{4} - \frac{p^3}{27}}}$.

DE CONSTRUCTIONIBUS ÆQUATIONUM.

Admonitio breviſſima.

Æquationem reſolvi dico, cum valores incognitæ x educuntur per litteras expreſſi; conſtrui, cum certa linearum deſcriptione determinantur. De conſtructionibus paucula te monebo, non ut rem tractem, ſed ne omnino prætermiſiſſe videar. Eſt autem prius de æquationibus indeterminatis dicendum, quæ & ſuam habent conſtructionem, ut mox videbimus, & ad conſtructionem æquationum determinatarum aperiunt viam.

Sextum cum sexto, invenio t (C K, sive C L) $= \frac{a}{2}$. Hunc valorem transfero in valorem supra inventum litteræ p, habeoque tandem $p = a$.

Hic dubium non est, quin, si valores inventi constantium n, p, r, u, t in formulam transferantur, ea convertatur in æquationem datam; ideoque æquatio data, ipsa quoque, ad ellipsim sit.

Unum autem animadvertas, volo. In formula ellipseos coefficiens tertii termini majus est quadrato, quod fit ex dimidiato coefficiente termini secundi; eaque in ęquationem datam semper converti poterit, si æquatio data eamdem hanc habeat conditionem, veluti æquatio illa, quam supra dedimus, $yy + oxy + xx + oy$ &c., in qua coefficiens tertii termini est 1, majus quam quadratum, quod fit ex dimidiato coefficiente o secundi termini; est enim hoc quadratum $= o$.

Ut parabola, atque ellipsis, sic etiam hyperbola suas habet formulas, quas accuratius persecuntur qui plus, quam ego, ingenio abundant, atque otio. His autem constat, indeterminatam nullam æquationem secundi gradus dari posse, ad quam hyperbolæ formula non deducatur, si hanc modo habeat conditionem, ut coefficiens tertii termini minus sit, quam quadratum, quod fit ex dimidiato coefficiente termini secundi.

Quo apparet, æquationem quamlibet indeterminatam secundi gradus esse vel ad parabolam, vel ad ellipsim, vel ad hyperbolam. Si coefficiens tertii termini æquale sit ei quadrato, quod fit ex dimidio coefficiente termini secundi, ad parabolam; si majus, ad ellipsim;

si minus, ad hyperbolam. Theorema longe nobilissimum.

De constructionibus æquationum determinatarum.

ÆQuationes determinatæ vel primi vel secundi gradus resolutionem habent paratissimam; ideoque in his constructio minus quæri solet; potius quæritur in æquationibus tertii, vel quarti gradus. De his dicturus theorema prius exponam, quod totius artificii caput est.

Theorema.

PRoposita sit æquatio quævis determinata $xx+ax-bb=o$. Hinc primum excerpe incogniti quidpiam, puta xx, idque æquans variabili cuivis, puta ay; finge locum $xx=ay$. Tum, rediens ad æquationem propositam, pro xx substitue ay, ac finge locum alterum $ay+ax-bb=o$.

Duos hos locos sic construe, ut in utroque abscissa x ducatur ab eodem puncto A, (*Fig.* 31.) extendaturque ad eamdem partem per rectam AZ; sitque ordinatarum angulus in utroque idem. Sit RL locus $xx=ay$. TV locus $ay+ax-bb=o$: Hique se intersecent in H. Duc ad lineam AZ ordinatam HI.

Dico, abscissam AI esse valorem, quem habet x in æquatione proposita. Etenim hæc AI, ut quæ pertinet ad locum RL, ea certe est, ut quantitas

xx

xx æqualis ſit quantitati ay; ut vero pertinet ad locum TV, ea certe eſt, ut quantitas ay, adjuncta quantitati $ax - bb$, ſit æqualis zero. Ergo hæc abſciſſa AI ea eſt, ut quantitas xx, adjuncta quantitati $ax - bb$, æqualis ſit zero; ideſt ſit $xx + ax - bb = o$. Ergo hæc AI verificat æquationem propoſitam, eſtque valor incognitæ in tali æquatione.

Potuiſſes eodem modo ex æquatione propoſita excerpere x, ac ponere locum hunc $x = y$; tum, rediens ad æquationem propoſitam, ubivis ſubſtituere y pro x, ac ponere locum alterum, verbi gratia $xx + ay - bb = o$, vel $yx + ay - bb = o$, vel etiam $yy + ax - bb = o$. Nam conſtructo primo illo loco $x = y$, ſi horum quemlibet conſtruxiſſes, res bene ceſſiſſet.

De conſtructionibus æquationum determinatarum tertii vel quarti gradus.

His, quæ adhuc dixi, probe cognitis, ſatis erit, in æquationibus determinatis vel tertii vel quarti gradus, exempla paucula afferre.

Propoſita ſit æquatio $x^3 - bbx - c^3 = o$. Locum primum pone $xx = ay$. Tum inſere ubivis in æquationem propoſitam ay pro xx, habebiſque locum alterum $ayx - bbx - c^3 = o$. Quod ſi hos locos conſtruxeris ea ratione, quam ſupra monui, æquationem propoſitam iam facile conſtructam habebis per duos locos.

Vel

Vel etiam pone primum locum $x = y$; tum pro x insere ubivis y in æquationem propositam; habebisque locum alterum $yxx - bbx - c^3 = o$, sive $x^3 - bby - c^3 = o$, sive $yxx - bby - c^3 = o$. Quod si locum primum $x = y$, & horum quemlibet construxeris, non minus constructam habebis per locos duos æquationem propositam.

Proposita sit æquatio $x^4 + a^2 x^2 - a^3 x - b^4 = o$. Pone primum locum $xx = ay$; tum ubivis insere in æquationem propositam ay pro xx; habebisque locum alterum $ax^2 y + a^2 x^2 - a^3 x - b^4 = o$, sive $a^2 y^2 + a^2 x^2 - a^3 x - b^4 = o$, sive $a^2 y^2 + a^3 y - a^3 x - b^4 = o$. Quod si primum locum construxeris $xx = ay$, tum horum quemlibet, constructam facile habebis per duos locos æquationem propositam, ut supra monui.

His patet, eamdem æquationem per multa locorum paria construi posse: illa autem præstantiora habentur & commodiora, quorum loci non ultra secundum gradum efferuntur, de quibus supra dixi.

Atque per te ipse facile intelligis, tot valores reales habere incognitam x in æquatione proposita, quot sunt puncta, in quibus loci, ad construendum adhibiti, se intersecant; valores alios, si quos habebit, imaginarios esse; quod si nusquam loci se intersecant, valores esse imaginarios omnes. Quam tamen rationem nolim ita perpetuam habeas, quasi numquam fallere possit; fallit enim aliquando, nisi cautio quædam adhibeatur, quod alias explicabo.

Construendi rationem habes, mi Ratta jucundissime,

ſime, non perfectam illam quidem, neque abſolutam, ſed vix attactam, inchoatamque; quam tu, ſi voles, perficies, ſcriptores claros conſulens, Hoſpitalium, præſertim clariſſimum inter omnes.

ADDITA.

Nota Prima.

FIgura formulæ primæ ex valoribus inventis conſtantium n, r, p, u hanc formam accipit. Eſt $AB = BE = m$. (*Fig.* 32.) Ponitur ſemper $AE = e$. Eſt autem AE diameter parabolæ AM, cujus ordinatam eſſe volumus GM parallelam BE, parametrum vero $p = \frac{mb}{e}$.

His poſitis ſume $AP = x$. $PM = y$, parallelam BE, ſecantemque AE in G; ac, cum ſit $\overline{GM}^2 = AG . \frac{mb}{e}$, æquationem parabolæ AM ex his tantummodo tibi compara.

Cum ſit $AB = BE$, erit etiam $AP = PG = x$; ideoque $GM = y - x$. Præterea cum ſit $AB, AE :: AP, AG$, erit $AG = \frac{ex}{m}$, unde æquatio exſiſtet $yy - 2xy + xx = \frac{ex}{m} . \frac{mb}{e}$, ſive $yy - 2xy + xx - bx = o$. Æquatio illa ipſa, quæ data fuerat.

No-

Nota Secunda.

Si æquationem datam referas ad secundam formulam, valores constantium n, r, p, u hos habebis $n = m$, $r = \frac{b}{2}$, $u = \frac{-be}{4m}$, $p = \frac{mb}{e}$. Figura vero hanc formam accipiet. Erit $AB = BE = m$. (*Fig.* 33.) (Ponitur semper $AE = e$) Erit $AD = \frac{b}{2}$, $CD = \frac{be}{4m}$, quæ erit diameter parabolæ CM, cujus ordinata GM parallela BE, sive AP, parameter vero $= \frac{mb}{e}$. Sume iam $AP = x$, $PM = y$ parallelam AB, ac tibi compara æquationem parabolæ CM.

Produc MG, ut secet AE in F, AB in Q. Erit $QM = AP = x$. $AQ = PM = y$. Cum sit $AB = BE$, erit $AQ = QF$, ergo $QF = y$. Erit etiam $FG = AD = \frac{b}{2}$. Ergo $GM = x - y - \frac{b}{2}$. Præterea cum sit $AB, AE :: AQ, AF$, erit $AF = \frac{ey}{m} = DG$. Quare cum sit $CD = \frac{be}{4m}$, erit $CG = \frac{be}{4m} + \frac{ey}{m}$. Iam vero cum sit $\overline{GM}^2 = CG \cdot \frac{mb}{e}$, hinc æquationem duces parabolæ CM.

$$xx + yy + \frac{bb}{4} - 2yx - bx + by = \frac{be}{4m} \cdot \frac{mb}{e} + \frac{ey}{m} \cdot \frac{mb}{e}$$

quæ si erit expurgetur, erit $xx - 2yx + yy - bx = 0$: illa ipsa æquatio, quæ data fuerat.

Nota

Nota Tertia.

Quamvis æquatio, quæ e formula ducitur, eadem ſit atque æquatio data, non erit tamen ad eamdem parabolam, niſi ſi angulus coordinatarum x & y idem ſit in utraque. Quare, ut ſit idem, ſi æquatic data referatur ad primam formulam, curandum erit, ut angulus E B A æqualis ponatur angulo, quem faciunt coordinatæ in data æquatione; quippe cum in hac formula ponatur y (P M) parallela lineę B E. Tale aliquid curandum erit in linea A B, ſi æquatio data referatur ad ſecundam formulam; quippe cum in hac formula ponatur y (P M) parallela lineę A B.



2

dimenſiones habet, nuſquam vero plures, æquatio dicitur ſecundi gradus; ſi tres, tertii, &c. Æquatio ergo $xx + ay = o$ erit ſecundi gradus. Æquatio $bx^2 + x^2 y - a^2 y = o$ tertii, &c. Quod ſi in æquatione quapiam productum variabile nullum ſit, ut in hac $bx - cy = o$, æquatio dicitur primi gradus; quæ numquam non eſt ad lineam rectam, quod facile apparet, vel nullo admonente.

Æquationem indeterminatam ſecundi gradus, de qua ſermo inciderit, ſic ordinatam eſſe volo, ut in his exemplis $yy + xy + xx + ay + bx + ce = o$, ſive $xx + yx + yy + bx + ay + ce = o$. Nimirum ſit primo loco quadratum unius variabilis; iſque dicetur primus terminus; tum productum ex ambabus variabilibus; iſque erit ſecundus terminus; deinde quadratum alterius variabilis; iſque erit tertius terminus. Alii tres termini deinceps ſequantur eo ordine, qui in exemplis apparet.

Primum terminum ſigno poſitivo affectum volo, nulloque coefficiente præter quam 1. Reliqui termini ſigna habebunt, & coefficientes, uti res feret.

Si primo loco poſitum fuerit yy, dicetur æquatio ordinata per y; ſi xx, per x.

Si quis terminus æquationi cuivis propoſitæ abfuerit, eum adeſſe putabo coefficiente zero affectum.

Formulæ ſunt æquationes quædam maxime abſtractæ, quæ proponuntur, ut mutatis tantummodo conſtantibus in alias, atque alias vertantur. Harum

aliquot ad fectiones conicas pertinent; hæque plurimum valent ad conſtruendam æquationem quamlibet indeterminatam ſecundi gradus.

DE FORMULIS DUABUS AD PARABOLAM PERTINENTIBUS.

Formula prima.

SIt tibi recta indefinita AZ. (*Fig.* 27.) In hac ſume quamvis $AB = m$. Duc quamvis $BE = n$ quovis angulo ABE. Ac duc AE, quam facies $= e$. Duc præterea $AD = r$ parallelam BE, atque indefinitam DG parallelam AE, in eaque ſume quamvis $DC = u$. Finge tibi parabolam CM, cujus diameter CG, parameter $LH = p$. Ordinata GM parallela BE.

Iam vero in AZ ſume $AP = x$, & duc $PM = y$ parallelam BE, ſecantemque CG in G, & parabolam in M. Ex eo quod eſt $CG . LH = \overline{GM}^2$ æquationem duces parabolæ CM, quæ æquatio, rite ordinata per y, ſic erit

$$yy - \frac{2nxy}{m} + \frac{nnxx}{mm} - 2ry + \frac{2nrx}{m} + rr = 0.$$
$$- \frac{epx}{m} + pu$$

Nempe formula prima.

For-

Formula secunda.

Sit tibi recta infinita AZ. [*Fig.* 28.] Duc quamvis AB $= m$ angulo quovis BAZ. Tum duc BE $= n$ parallelam AZ, & duc AE, quæ fiat $= e$. In AZ sume AD $= r$, & duc DG indefinitam parallelam AE, in eaque sume DC $= u$. Sitque parabola CM, cujus diameter CG, parameter LH $= p$, ordinata GM parallela BE.

Jam vero in AZ sume AP $= x$, & duc PM $= y$ parallelam AB. Si ducatur MG parallela AP; secansque diametrum CG in G, erit CG. LH $= \overline{GM}^2$. Hinc ergo æquationem duces parabolæ CM, quæ æquatio, rite ordinata per x, sic erit

$$xx - \frac{2nyx}{m} + \frac{nnyy}{mm} - 2rz + \frac{2nry}{m} + rr = 0.$$
$$- \frac{epy}{m} + pu$$

Formula secunda.

De usu harum formularum.

Utraque harum formularum est sane ad parabolam, quæcumque sint constantes n, r, p, u; quare si his tantum mutatis formula convertatur in æquationem quamvis datam, consequens erit, hanc quoque esse ad parabolam. Ut id explores, statim æquationem datam rite ordinabis sive per y, sive per

 x, ac

x, ac si quis terminus desit, hunc tamen pones cum coefficiente zero. Quod si ordinaveris per y, refer te ad primam formulam, si per x, ad secundam. Convertetur autem formula in æquationem datam, si coefficientes singulorum terminorum iidem in utraque evadent, & sextus terminus idem ac sextus.

Sit æquatio data

$$yy - 2xy + xx - oy - bx + o = o$$

Formula prima

$$\left.\begin{array}{l} yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{ep}{m}x + pu \end{array}\right\} = o$$

Secundi termini coefficientes eosdem reddes, si æquatis ambobus: $-\frac{2n}{m} = -2$ separabis constantem n, atque in formula ubique pro n pones ejus valorem. In allato exemplo, cum inveniatur $n = m$, si ubique m posueris pro n, eosdem habebis coefficientes secundi termini tum in formula, tum in æquatione data.

Tertii termini coefficientes eosdem habebis artificio nullo, si conditio quidem illa adsit, quæ adest commode in exemplo allato. Est autem conditio hæc: ut quemadmodum in formula coefficiens tertii termini $\frac{nn}{mm}$ est quadratum, quod fit ex dimidiato coefficiente secundi termini; idest ex $-\frac{n}{m}$, id etiam contingat in æquatione data. Et sane in exem-

exemplo allato contingit; etenim in æquatione data coefficiens tertii termini eſt 1, idque ipſum eſt quadratum, quod fit ex dimidiato coefficiente ſecundi termini, ideſt ex -1. Si conditio hæc aderit, ubi coefficientes ſecundi termini eoſdem feceris tum in formula, tum in æquatione data; hoc ipſo eoſdem habebis etiam coefficientes tertii termini. Et ſane (ne ab exemplo diſcedam) eoſdem habebis, ſi ubique pro n poſueris m.

Quarti termini coefficientes facile eoſdem reddes, ſi æquatis ambobus: $-2r=o$, ſeparaveris r, & in formula ubique pro r ejus valorem pones; itaque in exemplo allato, cum inveniatur $r=o$, ſi in formula ubique pones o pro r, coefficientes quarti termini eoſdem habebis & in formula, & in æquatione data.

Quinti termini coefficientes ſimili modo eoſdem habebis. Ut maneam in exemplo; pones $\frac{2nr}{m} - \frac{ep}{m} = -b$, ſive (cum facta fuerit $r=o$) $-\frac{ep}{m} = -b$; tum ſeparabis p, atque invenies $p = \frac{mb}{e}$. Ubique ergo in formula pro p pones $\frac{mb}{e}$. Ac coefficientes quinti termini eoſdem habebis tum in formula, tum in æquatione data.

Sextum terminum pari modo eumdem reddes tum in formula, tum in æquatione data. Pones $rr+pu=o$, ſive (ſupplendo o pro r, & $\frac{mb}{e}$ pro p) $\frac{mbu}{e}=o$, & quoniam

niam invenies $u = o$, pones in formula o pro u; habebisque etiam terminum eumdem tum in formula, tum in data æquatione. Sic formula conversa erit in æquationem datam mutatis tantummodo constantibus n, r, p, u.

Et sane figuram, quam formulæ dedimus, compone ex valoribus harum constantium. Fac E B = A B, (*Fig.* 29.) idest $n = m$. Tum ducta A E, quæ denominabitur e, fac A D $= o$. Cadet punctum D in A; & linea A G in A E. Fac etiam D C, sive A C $= o$, & cadet etiam punctum C in A. Tum finge parabolam A M, cui sit diameter A E, ordinata G M parallela B E, parameter vero sit $\frac{mb}{e}$. Ac sit tibi A P $= x$, P M $= y$ parallela B E, secansque A E in G. (*Vide in Additis Notam I.*, & *III.*) Ubi hæc feceris, figuram formulæ in hanc conversam habebis, quæ hic adest. Ac si æquationem quæres parabolæ A M, illa ipsa prodibit æquatio, quæ data fuerat, quo certius constat, eam esse ad parabolam.

Quo tamen loco hoc tibi tenendum est. Si cujusvis constantis n, r, u valor negativus prodierit, erit tibi ea constans sumenda non ad illam partem, ad quam sumta fuit in figura formulæ, sed ad oppositam. Quod si negativus prodibit valor parametri p, erit etiam parabola in contrariam partem vertenda.

Posses æquationem datam, quoniam habet ambo quadrata yy, xx (*Vide in Additis Notam II.*, & *III.*)
or-

ordinare etiam per x, teque referre ad fecundam formulam. Id fi feceris, facile intelliges, præceptiones & monita redire eodem.

His omnibus facile conftat, formulam quampiam parabolæ in unam quamque æquationem fecundi gradus converti poffe, ideoque hanc etiam effe ad parabolam, fi modo adfit conditio illa, de qua fupra dixi, ut coefficiens tertii termini æquale fit quadrato, quod fit ex dimidiato coefficiente termini fecundi.

De formula ad Ellipfim pertinente.

ERo in hac brevior, vel potius, fi ita vis, mi Ratta, negligentior. Sic enim fere gignitur ellipfeos formula, uti parabolæ; neque adhibetur aliter.

Sit tibi indefinita recta A Z. (*Fig.* 30.) In hac fume quamvis $AB = m$. Duc $BE = n$, quovis angulo A B E. Tum duc A E, quam facies $= e$. Duc deinde $AD = r$ parallelam B E, ac per D indefinitam L K parallelam A E. In hac fume $DC = u$. Tum hinc & hinc æquales duas C K, C L; ac fit utraque $= t$. Finge iam tibi ellipfim L M K, cujus diameter L K, ea quidem, cujus ordinata G M, parallela B E, parameter vero $LH = p$.

Jam ergo fi in A Z fumferis $AP = x$, tum duxeris $PM = y$ parallelam B E, fecantemque L K in G, & ellipfim in M, cum fit $LG . GK, \overline{GM}^2 :: LK, LH$;

L H; hinc æquationem duces ellipſeos L M K, quæ æquatio, rite ordinata, ſic erit

$$yy - \frac{2n}{m}xy + \frac{nn}{mm}xx - 2ry + \frac{2nr}{m}x + rr$$
$$+ \frac{eep}{2mmt}xx \qquad - \frac{2epu}{2mt}x - \frac{ptt}{2t} = 0$$
$$+ \frac{puu}{2t}$$

Scilicet ellipſeos formula hæc ipſa æquatio eſt, quæ numquam non ad ellipſim erit, quæcumque ſint conſtantes illæ quinque n, p, r; u, t. Quare ſi, his tantum mutatis, vertatur in datam æquationem quamlibet, non eſt dubium, quin hæc quoque ad ellipſim ſit. Periculum fiet comparando ſingulos terminos formulæ cum ſingulis æquationis datæ, ut ſupra fecimus. Exemplo ſit æquatio hæc data $yy + xx - ax = 0$, quam, ne quis terminus deſit, ſic ſcribo $yy + 0xy + xx + 0y - ax + 0 = 0$.

Secundum terminum cum ſecundo comparans, invenio n (B E) $= 0$. Eoque intelligo, eſſe A E $=$ A B, ideſt $e = m$.

Tertium cum tertio, invenio p [L H] $= 2t$. Infra inveniam valorem litteræ t, eumque huc transferam.

Quartum cum quarto, invenio r (A D) $= 0$. Eoque intelligo, lineam L K cadere in lineam A E, ideſt in A B.

Quintum cum quinto, invenio u (D C) $= \frac{a}{2}$.

Sex-

DE VIRIBUS CENTRALIBUS

Quibus corpora per fectiones conicas volvuntur, centro virium in foco manente, brevis ac facilis expofitio in capita fex diftributa.

OPUSCULUM

Eorum gratia confcriptum, qui ad Nevtonianorum phyficam introduci volunt.

FRANCISCUS MARIA ZANOTTUS

TORQUATO VARENO

Adolescenti suavissimo, atque optimo

S. P. D.

QUidam sunt, nec ita pauci, quod tibi jam, mi Torquate, per ætatem cognoscere vix licet, qui in isto, in quo tu versaris, physicæ scientiæ curriculo magni Nevtoni nomine usque adeo se sinunt abripi, ut quem numquam fortasse legerint, cujusque ne unam quidem propositionem demonstrare possint, si velint, eum tamen se unice admirari prædicent, & in deliciis habere. Quorum rationem etsi probare nullo modo possum, non omnino tamen, quod multi faciunt, velim reprehendere; ac potius, quod Nevtonum ament, laudem; quod ejus doctrinam minus teneant, ignoscam. Id enim non tam ipsorum segnitie fieri arbitror, quam illorum ingenio, qui nobilissima ac prope divina summi Philosophi inventa tractaverunt. Hi siquidem, ut mathematici fere sunt excellentissimi, indulgentes sibi, vagantur interdum latius, nec nisi per exquisitiora artificia longeque petita, ad ea, quæ physicorum sunt, accedunt. Quæ physici quidem, si paucos excipias, vix possint assequi. Sunt enim plerique a geometria, atque algebra haud satis instructi, quippe qui naturalium rerum studio abrepti mathematicos se esse mediocres facile patiuntur. Atque

bis quidem, quoniam Nevtoniani quoquo modo esse volunt, gratum sit, puto, si qui leges omnes atque hypotheses, quibus natura nequaquam utitur, prætermittens, ea statim, quæ physicæ conjunctiora sunt, arripiat, & in unum colligens secernat ab aliis, & minus ingeniose tractet. Id ego superioribus mensibus, cum valetudinis mihi atque otii satis esset, ex aliqua parte tentare decrevi. Libellum ergo confeci de viribus centralibus, ut in sectionibus conicis maxime se produnt, qui locus philosophiæ Newtonianæ summam fere continet, estque ad physicas cælestium corporum conversiones explicandas aptissimus. Omnia vero, quæ quidem in illo argumento prima sunt, brevissimis calculis minimeque artificiosis comprehendere conatus sum, ut, quantum simplicitas possit, experirer. Quid profecerim, tute videris. Libellum enim tibi inscriptum ad te mittere decrevi, ut testem haberes amoris erga te mei. Quod si illum cum præceptore tuo, quem vehementer suspicio, & in paucissimis sane numero, per otium communicaveris, meque, si quid vobis errasse videbor, pro amicitia nostra monueris, tam gratum erit quam quod gratissimum; nam quamvis mathematicis concedi non soleat, ut timeant ne errent, id mihi tamen concedi volo homini non mathematico. Ceterum quamvis brevitatem ubique studuerim, non eam tamen exspectes velim, quam plerique, docti præsertim homines atque industrii, consectantur, quæque eum elegantiori quodam artificio conjuncta esse solet. Quæ enim sic explicantur, etsi sunt brevia, moram tamen legentibus sæpe afferunt, neque

rem

rem statim cognosci sinunt ; itaque multos deterrent . Quare illud etiam curavi, quantum potui, ut essem sine artificio brevis . Tuum erit elegantiam brevitati addere, putabisque me hunc locum industriæ tuæ relinquere voluisse . Sic enim existimo, adolescentulos, ingeniosos præsertim tuique similes, non omni labore, ut multi jam putant, levandos esse, sed exerceri oportere, eorumque ingenia torqueri paululum, quo fiant acutiora .

Sed jam quæres, quæ te scire oporteat, antequam ad libellum hunc nostrum legendum accedas . Perpauca, mi Torquate . Communis scilicet geometriæ elementa scias velim ; & sectionum conicarum definitiones, primasque proprietates tantum non ignores . Quod si quæ erunt, quas te nondum vidisse suspicer, de iis suo loco monebo . Sis etiam volo a communi Cartesianorum algebra paulo instructior, neque tractandarum æquationum ratio te fugiat . In quo quidem te jam inter æquales tuos excellere & intelligo, & magnopere gaudeo .

Ex illa vero reconditiori geometria, qua nihil his temporibus est illustrius, quæque infinitesimalis dici solet, satis erit, si illud teneas, quod in ea disciplina primum est, quantitatem infinitesimam pro nulla haberi posse, si cum ea comparetur, ad quam infinitesima esse dicitur ; itaque æqualia esse quæcumque differentiam tantum habent infinitesimam . Neque, si quantitatem infinitesimam posueris, refugias aliam rursum ponere, quæ sit ad eam, quam posuisti, infinitesima ; eoque modo ad infinitos infinitesimorum ordines alios aliis inferiores excurras . Quod unum si animo comprehenderis, facile etiam

tiam

tiam intelliges & curvam quamvis lineam perinde haberi posse, ut si ex infinitis lineolis rectis constaret; & unamquamque ex his lineolis, si producatur, tangentem esse; & angulum, quem linea tangens cum curva facit, esse infinitesimum. Neque *omnino, si quantitas proponatur, cujuscumque tandem sit generis, quę perpetuo variet, eam recusabis perinde accipere, ac si variet per intervalla infinitesima; sit vero in unoquoque intervallo constans. Velut, si corpus in motu positum velocitatem perpetuo variet, hanc putabis in tempusculis aliis aliam esse, in unoquoque constantem. Quę quidem expeditissima ei sint, qui se in Leibnitianorum calculo aliquantulum exercuerit; quapropter si hunc etiam attigeris, in eoque paululum progressus fueris, quantulumcumque id sit, haud erit inutile.*

Jam vero quoniam monere te cœpi, hęc etiam habe. Æquationes tibi in hoc, quem ad te mittimus, libro sępe occurrent, non omnino illarum similes, quę in geometricis quęstionibus tractandis occurrere passim solent; hę quippe duarum quantitatum ęqualitatem exprimunt; nostrę illę analogiam, sive proportionalitatem potius quamdam. Velut si posuero $u = x$*, sit autem mihi* u *velocitas,* x *vero linea quępiam; velocitatem utique non æqualem lineæ esse, sed proportionalem intelligam; quod ambæ scilicet, cum linea, tum velcoitas, eadem proportione perpetuo varient. In his ergo æquationibus, quod tute vides, multiplicari pars altera per constantem quamlibet quantitatem poterit, salva æquatione; nam quamvis ea multiplicatione æqualitas tolla-*

tur,

tur, proportionalitas non tollitur. Neque minus licebit, utramque partem per eamdem quantitatem multiplicare, nam ne hoc quidem tollitur proportionalitas. Quin & radices ambarum partium extrahi tuto poterunt, & quadrata fieri; si enim quantitates ipsæ proportionales inter se sunt, oportet sane & earum radices proportionales inter se esse, & quadrata.

Et quoniam in quæstionibus, quæ per hujusmodi æquationes tractantur, non nisi proportionalitas quædam quæri solet, liberum cuique erit, si quantitates duæ proportionales inter se fuerint, alteram alteri substituere pro voluntate, puta circumferentiæ diametrum, sive radium, seu quidquid aliud proportionale circumferentiæ est.

Neque vero in explicandis, construendisque quantitatum valoribus generum te offendat diversitas: velut si certum spatium proposuero divisum per tempus quodpiam, idque dixero velocitatis cujusdam mensuram esse; in quo ne te illud turbet, quod tempus, & spatium genere ipso inter se distant; velocitas autem genus tertium est. Nam & spatium certam habet in suo genere unitatem, ad quam si referatur, numero possit exprimi, & tempus pariter in suo genere unitatem habet suam. Quod si tempus & spatium ad unitatem unumquodque suam referantur, & numeris exprimantur, existet ex horum divisione numerus, quem pro velocitatis mensura habeas.

Pressius hæc dixi, non enim docere te volui, sed tantum monere. Tu autem eo ingenio es (quod & per

me

me ipse alias cognovi, & omnes, qui istinc ad nos veniunt, quique tecum fuerunt, testantur) ut fortasse ne moneri quidem opus habeas. Vale, mi Torquate, & quantum ego te diligo, tantam fac, ut me abs te diligi intelligam.



DE

DE VIRIBUS CENTRALIBUS

QUIBUS CORPORA PER SECTIONES CONICAS VOLVUNTUR

AD TORQUATUM VARENUM.

PROLEGOMENA.

De motu generatim.

ANtequam vires centrales exponere ingredior, non alienum erit, mi Torquate, pauca quædam monere, eorum præfertim caufa, qui mechanicarum rerum funt plane rudes; nam quamvis expeditiffima fint, ac prope in medio pofita; iis vero, qui rem mechanicam vel leviter attigerunt, paratiffima; tamen, quia funt neceffaria, non videntur prætermittenda. Exordiar a motu, quem generatim primum, & quatenus tantum motus eft, confiderabo.

1. In corpore, quod movetur, tria præfertim veniunt confideranda, maffa corporis, velocitas, vis motrix. Ac maffa quidem nihil eft aliud nifi materia, qua corpus conftat. Materia autem omnis eo ingenio effe creditur, ut quem motum femel acceperit, nifi fi quid extrinfecus intercedat, eumdem perpetuo fervet.

2. Velocitas est dispositio corporis ad certum spatium certo tempore conficiendum. Eaque tanto major esse censetur, quanto majus est spatium, & quanto minus est tempus. Velocitatem ergo recte exprimes dividendo spatium per tempus. Sit velocitas $= V$. Spatium $= S$. Tempus $= T$. Erit $V = \frac{S}{T}$.

3. Hinc sequitur, ut spatium sit velocitas ipsa ducta in tempus; si enim est $V = \frac{S}{T}$, erit etiam $S = V T$.

4. Sequitur etiam, ut tempus sit spatium divisum per velocitatem; si enim est $V = \frac{S}{T}$, ut modo diximus; erit etiam $T = \frac{S}{V}$.

5. Porro cum velocitas exprimatur spatio diviso per tempus, satis constat, velocitates esse spatiis proportionales, si tempora quidem sint æqualia; ac vicissim tempora æqualia esse, si velocitates proportionales sint spatiis.

6. Constat etiam, velocitates æquales inter se esse, si spatia sint temporibus proportionalia. Hæc atque alia vel leviter attendenti sua sponte se produnt.

7. Vis motrix est vis illa, quæ velocitatem creat in corpore; ac tanto major esse censetur, quanto est major velocitas, quam creat; & simul quanto major est massa corporis, in quo illam creat; itaque vim motricem recte exprimes multiplicando massam per velocitatem. Si ergo corporis massa $= M$. Velocitas $= V$. Erit vis motrix $= M V$.

8. Hinc

8. Hinc multa profluunt usque adeo manifesta, ut demonstrationem non desiderent. Ac primum cum sit vis motrix, uti dixi, $= M V$, statim constat, vires esse massis proportionales, si velocitates quidem æquales sint; ac si æquales sint massæ, esse vires proportionales velocitatibus.

9. Neque minus constat, haberi velocitatem corporis, si vis dividatur per massam, & similiter haberi massam, si vis dividatur per velocitatem.

10. Quod si vires duæ sint æquales, cum sit utraque productum massæ & velocitatis, erunt sane massæ reciproce proportionales velocitatibus; & vicissim si fuerint massæ reciproce proportionales velocitatibus, oportebit vires æquales esse. Hæc de motu generatim dixisse satis sit.

De motu composito.

11. Agatur corpus A uno tempore duabus viribus duas diversas directiones A B, A C (*Fig.* 1.) habentibus. Sume lineas duas A B, A C proportionales ipsis viribus, tum parallelogrammum B C confice. Feretur corpus, quod omnes consentiunt, per diagonalem A D, ea quidem vi, quam linea ipsa A D exprimet.

12. Vis, qua corpus fertur per A D, dicitur vis composita. Motus quoque ipse per A D motus com-

positus appellatur. Vires A B, A C, nec non & motus ipsi per lineas A B, A C, dicuntur componentes.

13. Quoniam vis composita A D, & vires componentes A B, A C in eadem massa considerantur, sequitur, ut velocitatibus proportionales sint (8.). Et quoniam propoitionales quoque sunt lineis A D, A B, A C, sequitur ut etiam velocitates sint lineis eisdem proportionales. Quo ergo tempore percurrit corpus lineam A D vi composita, eodem tempore percurreret lineam A B, si sola vi A B ageretur; & lineam A C, si ageretur sola vi A C (5.).

14. Quod si virium tum compositæ, tum componentium directiones A D, A B, A C datæ fuerint, nihil erit expeditius, quam tres lineas constituere, quæ vires ipsas, ideoque etiam velocitates exprimant. Nempe si a quovis puncto D directionis A D ducantur lineæ D C, D B parallelæ directionibus A B, A C, compleaturque parallelogrammum B C. Etenim lineæ tres A D, A B, A C, ut facile apparet, vires ipsas expriment, A D quidem vim compositam, A B, A C vires componentes.

Permulta ab auctoribus de motu composito tradi solent; elegantia illa quidem, sed ad ea, quæ de viribus centralibus dicenda nobis sunt, minus necessaria. His ergo omnibus supersedebimus.

De vi attractiva.

15. VIs attractiva, quæ etiam gravitas appellari solet, universæ materiæ æque communis esse creditur. Itaque corpus quodvis A trahit ad se corpus quodvis B, ac tanto majorem in illud vim exercet, quanto major est massa cum corporis A, tum corporis B; quippe quia unaquæque pars corporis A vim exercet suam, eamque exercet in unamquamque partem corporis B.

16. Erit ergo vis attractiva in proportione composita massarum. Sit massa corporis $A = M$; corporis $B = m$. Erit vis attractiva $= Mm$, si massis quidem æstimanda tantum sit. Æstimari autem solet non massis tantum, sed etiam potestate quapiam distantiæ illius, quæ inter corpora se mutuo trahentia intercedit. Hinc multæ & variæ attractionis leges, ut cuique libet, fingi possunt. Vulgo tenet lex illa, ut tanto major censeatur esse vis attractiva, quanto minus est distantiæ quadratum. Quare si distantia, quæ intercedit inter corpora A, & B, sit $= D$, erit jam vis attractiva $= \frac{Mm}{DD}$. Hanc legem sequemur, ubicumque de massæ cujuspiam attractione sermo incidet.

17. Non est dubium, quin vis attractiva æque urgeat utrumque corpus A, & B; valet enim in utroque par ratio. Neque minus constat, vim attractivam in unoquoque momento temporis velocitatem

quam-

quamdam minimam utrique corpori tribuere. Quod idem faciunt & aliæ vires, quotcumque corpori perpetuo instant. Velocitas hæc minima appelletur velocitas initialis.

18 Cum ambo corpora A, & B momentis singulis urgeantur, ut modo dixi, æquali vi; sequitur, ut velocitates initiales reciproce proportionales sint ipsorum massis (10.)

19. Et quoniam velocitas corporis habetur dividendo vim per massam (9.), vis autem, qua utrumque corpus urgetur est $\frac{M\,m}{D\,D}$; velocitas initialis corporis A, cujus massa est M, erit $\frac{m}{D\,D}$; velocitas initialis corporis B, cujus massa est *m*, erit $\frac{M}{D\,D}$. Igitur utriuslibet corporis velocitas initialis est massa corporis alterius divisa per quadratum distantiæ. Quo statim patet, velocitatem utriuslibet corporis eamdem manere, quantacumque ejus sit massa.

20. Mos tenet, ut corporis cujusque massa perinde consideretur, quasi in unum punctum collecta esset; quod punctum tanto majorem vim attractivam habere existimatur, quanto plus massæ in ipso insidere fingitur.

21. Fingi etiam solet, duorum corporum se mutuo trahentium alterum quidem sic teneri, ut moveri ne possit; alterum vero ad ipsum, tamquam ad centrum, ferri. Has mathematicorum consuetudines, pro eo ut res feret, sequemur.

De

22. CUm vis attractiva, seu gravitas, quemadmodum supra dixi, non massæ tantum magnitudine, sed etiam distantia æstimari debeat, consequens sane est, ut gravitas corporis ad centrum, a quo trahitur, accedentis perpetuo variet, quippe quia perpetuo variat distantia. Juvat tamen simplicissimam hypothesim in præsens persequi, ac cognoscere, quod spatium percurrat corpus cadendo, qua velocitate, quo tempore, si versus centrum feratur gravitate constanti, quæ nempe eadem ubique sit, & æqualem corpori velocitatem perpetuo tribuat. Quo loco quoniam a magnitudine massæ præscinditur, idcirco putabimus, gravitatem velocitati ipsi initiali proportionalem esse; quam scilicet velocitatem certo constitutoque tempusculo gravitas ipsa gignit in corpore. Hoc præmisso ad casum corporis venio.

23. Linea recta A T (*Fig.* 2.) tempus exprimat, quo corpus a quiete discedens versus centrum descendit. Constituantur partes ejus infinitesimæ & æquales A *m*, *m n*, *n o*, &c. quæ exprimunt tempuscula certa infinitesima, & æqualia. Primo tempusculo A *m* accipiet corpus a gravitate velocitatem quamdam minimam. Hanc exprimat lineola *A u*. Rectangulum *m u* exprimet sane spatium a corpore, tempusculo *A m*, velocitate A *u*, percurrendum (3.). Sic fit primo tempusculo; videamus, quid fiat reliquis; sed prius diagonalem A *x* producamus, donec secet lineam

neam T R, parallelam lineæ *m x*, in R. Secundo ſane tempuſculo *m n*, accipiet corpus a gravitate velocitatem aliam æqualem primæ, primamque adhuc retinens, feretur velocitate dupla. Velocitatem hanc exprimet lineola *n z*, parallela lineæ *m x*, ſecanſque A R in *z*. Rectangulum *n y* exprimet ſpatium a corpore, tempuſculo *m n*, velocitate *n z* percurrendum.

Quod ſi ad alia atque alia tempuſcula eodem modo proceſſeris, donec expleas triangulum totum A T R, linea A T exprimet tempus, quo corpus deſcendit; T R velocitatem, quam corpus obtinet in fine deſcenſus; ſumma vero rectangulorum *m u*, *n y*, *o p*, &c exprimet ſpatium, quod corpus deſcendendo confecit. Et quoniam ſumma rectangulorum *m u*, *n y*, *o p*, &c. nihil differt a triangulo ipſo A T R, quippe quia prominentia acumina *u*, *y*, *p*, &c. ſi in unam ſummam conferantur, ac cum triangulo A T R comparentur, infiniteſimum quidpiam ſunt; idcirco ſpatium, quod corpus deſcendendo conficit, exprimetur triangulo ipſo A T R.

24. His poſitis facile intelligitur, velocitatem T R, quam corpus obtinet in fine deſcenſus, duplam eſſe ejus velocitatis, qua deſcendendo ſpatium A T R, conficit. Hac enim velocitate in tempore A T conficit ſpatium, quod exprimitur triangulo A T R, ut modo oſtendimus. Velocitate vero T R, quam obtinet in fine deſcenſus, conficeret in eodem tempore A T ſpatium, quod rectangulo ex A T, & T R ex-

exprimitur (3.), quod rectangulum trianguli A T R duplum eſt.

25. Neque minus patet, ſpatium, quod corpus deſcendendo percurrit, quodque exprimitur triangulo A T R, eſſe in ratione compoſita gravitatis, ſeu velocitatis initialis, quæ exprimitur lineola A *u*, ſive *m x*, & quadrati temporis, quod tempus exprimitur linea A T. Manifeſtum eſt enim triangulum A T R tanto eſſe majus, quanto major eſt *m x*, ſi ſit quidem A T conſtans; & ſimul tanto eſſe majus, quanto eſt majus lineæ A T quadratum, ſi ſit quidem conſtans *m x*.

26. Si ergo ſit ſpatium = S. Tempus = T. Gravitas, ſeu velocitas initialis = G. Erit S = G T T.

Adnotatio. Agitur de caſu corporum ex gravitate conſtanti, ac facto ſpatio = S, tempore = T, gravitate = G ponitur S = G T T. Sunt qui mallent 2 S = G T T, quorum ratio hæc eſt. Gravitas, quæ utique intelligi debet in tempus ducta, nam niſi per tempus aliquod duret motum efficere nullum poteſt, gravitas, inquam, definiri, ac determinari debet per totum effectum, quem tali tempore parit, non per aliquam tantum effectus partem. Effectus autem totus, quem parit, eſt illa velocitas, quam corpus habet in fine deſcenſus, quæ utique eſt $\frac{2S}{T}$. Igitur poni debet $GT = \frac{2S}{T}$, unde 2 S = G T T. Niſi ſi volumus reſpectivam tantum æquationem, ſeu formulam condere, per quam o-

ſtendatur non quanta res ſit, ſed qua proportione augeatur, aut minuatur. Quod ſi hoc unice volumus recte ponetur $GT = \frac{S}{T}$, & $S = GTT$. Sed ſi his formulis aliquando utemur tamquam abſolutis, in errorem incidemus.

Placet ad id paucula animadvertere. Gravitas in corpore cadente duas gignit velocitates, velocitatem deſcenſus, ſeu mediam, & velocitatem ultimam. Velocitas media eſt illa, qua corpus conficit ſpatium, per quod cadit, & hæc ſane eſt $\frac{S}{T}$; fingitur autem eſſe perpetua, & conſtans in corpore per totum tempus T, quamvis talis velocitas conſtans vere nulla ſit. Velocitas ultima eſt ſemper dupla velocitatis mediæ; eſt ergo $\frac{2S}{T}$.

Ad definiendam determinandamque gravitatem nihil intereſt utra velocitate media utaris, an ultima, nam altera alteram neceſſario involvit, neque enim poteſt eſſe media 3, quin ultima ſit 6, aut media 5, quin ultima ſit 10. Sic nihil intereſt, utrum circulus determinetur per radium, an per diametrum, nam magnitudo unius involvit magnitudinem alterius. Quamquam duo utique cavenda ſunt. Primum ut qua velocitate uno in loco uteris ad gravitatem determinandam, eadem ubique utaris; deinde ut ſi de ambabus velocitatibus ſermo incidat, ultima ſemper ponatur mediæ dupla. Hæc ſi caveantur, quæ

uti-

utique ubique caventur in hoc libello, nullus irrepere error poterit.

Neque vero si determinetur gravitas per velocitatem mediam, dicendum est eam determinari non per totum effectum, sed per effectus partem, quasi totus effectus sit velocitas ultima $\frac{2S}{T}$, velocitas vero media $\frac{S}{T}$ sit ejus pars. Etenim qui determinat gravitatem per velocitatem mediam, eam determinat etiam per velocitatem ultimam; nam, ut modo dixi, media necessario involvit ultimam, quare determinat utique gravitatem per effectum totum. Atque haud scio, an velocitas media, quæ est velocitas quædam constans, quam animo fingimus, dici vere possit pars velocitatis ultimæ.

Quamvis gravitas, ut modo dixi, per utramlibet velocitatem mediam vel ultimam determinari possit, melius tamen erat in num. 26 eam determinare per mediam ponendo $S = GTT$, quam per ultimam ponendo $2S = GTT$. Id sic ostendo. Non est dubium, quin vis centripeta sit gravitas quædam constans, siquidem est vis illa, quæ efficit motum initialem, qua corpus incipiens labi versus centrum, certum spatiolum conficit certo tempusculo; est autem motus quivis initialis, ut vulgo constat, uniformiter acceleratus; constat ergo vim centripetam esse gravitatem quamdam constantem. Atqui tamen vis centripeta ex communi consuetudine determinatur spatiolo illo simplici, quod corpus conficit, non autem

ſpatiolo duplo, ideoque determinatur per velocitatem mediam, non vero per ultimam.

Sic num. 32 vis centripeta æſtimatur lineola R *u*; idemque fit num. 46. 61. 80. 94. Conſentaneum ergo erat gravitatem determinare per velocitatem mediam etiam in num. 26, ponendo $S = GTT$, non vero per ultimam ponendo $2S = GTT$.

27. Quo ſtatim intelligitur, tempus deſcenſus eſſe radicem ſpatii diviſi per gravitatem. Si enim $S = GTT$, erit etiam $T = \sqrt[1]{\frac{S}{G}}$.

28. Et quoniam velocitas deſcenſus exprimitur ſpatio diviſo per tempus, erit hæc $= \frac{S}{\sqrt[1]{\frac{S}{G}}} = \sqrt{GS}$; nempe radix gravitatis ductæ in ſpatium.

29. Ac ſi hanc ipſam velocitatem, ideſt radicem gravitatis ductæ in ſpatium, duplicaveris, habebis velocitatem, quam corpus obtinet in fine deſcenſus (24.). Erit ergo velocitas in fine deſcenſus $= 2\sqrt{GS}$.

Non inutile erit has formulas memoria tenere. Quamquam qui primam illam $S = GTT$ in animo infixam habuerit, alias ſibi ipſe, ſi res poſtulet, nullo labore parare poterit.

CA-

CAPUT I.

De Motu curvilineo generatim.

Lemma e geometria petitum.

30. A Puncto quovis R (*Fig.* 3.) curvæ cujusvis R P, ducta R T tangente, ducantur intra curvæ concavum lineæ quævis duæ R F, R M. Sumatur arcus R L infinitesimus, ducaturque L Q perpendicularis ad R F, nec non L y parallela tangenti R T, secans R F in x; R M in y.

Dico primum, omnia latera trianguli R x y esse infinitesima secundi ordinis. Dico secundo, omnia latera trianguli L x Q esse infinitesima primi ordinis.

Antequam hæc demonstro, ducatur L T perpendicularis ad tangentem R T, nec non R u perpendicularis ipsa quoque tangenti R T, secansque L y in u. Demum a puncto quovis F lineæ R F ducatur F M parallela & ipsa tangenti R T, occurrensque lineæ R u productæ in H, & lineæ R M in M.

Demonstro primam partem. Cum sit angulus L R T infinitesimus, ut qui fit a curva & tangente, erit lineola L T infinitesima, si ad lineam T R, sive L R, comparetur; quare cum R L ponatur infinitesima primi ordinis, erit L T infinitesima ordinis secundi, ergo etiam R u, quæ est æqualis L T. Jam vero cum triangula R F H, R x u sint similia, ac latera

tera omnia trianguli R F H sint assignabilia, oportebit latera omnia trianguli R $x u$ esse infinitesima ejusdem ordinis; erunt ergo omnia infinitesima ordinis secundi. Eamdem rationem transferes ad latera omnia trianguli R $x y$ ex similitudine triangulorum R F M, R $x y$.

Demonstro partem alteram. Cum sit L u infinitesima primi ordinis, ut quæ æqualis est lineæ R T, si ei dematur pars $x u$, quæ, ut modo ostendi, infinitesima est secundi ordinis, erit adhuc reliqua L x infinitesima primi ordinis. Jam vero cum triangulum L x Q simile sit triangulo R $x u$, ideoque etiam triangulo R F H; sint vero latera omnia trianguli R F H assignabilia, erunt latera omnia trianguli L x Q infinitesima ejusdem ordinis; ergo erunt omnia infinitesima ordinis primi.

De moto curvilineo.

31. INcedens corpus per curvam lineam quamlibet R P (*Fig.* 4.) sit jam in puncto quovis R. Hic sane, ut omnes docent, vim facit, ut per tangentem R T excurrat. Ut ergo a tangente deflectat, & curvam lineam sequatur, necesse est, ut vi alia quapiam urgeatur versus aliquod punctum F, quod intra curvæ concavum sit positum; sic quidem, ut vi ex duabus composita per laterculum R L curvæ se immittat.

32. Vis, qua corpus excurrere nititur per tangen-

gentem R T, dicitur vis projectionis, seu tangentialis. Vis, qua trahitur versus F, vis centripeta. Quod si a puncto quovis L laterculi R L ducantur lineæ L T, L *u* parallelæ directionibus R F, R T, completo parallelogrammo T *u*, exprimet sane linea R L velocitatem, qua corpus ex R in L fertur; linea R T exprimet velocitatem tangentialem; linea R *u* velocitatem initialem a vi centripeta ortam (14.).

33. Quare si sint arcus duo quivis infinitesimi R L, *r l* vel in eadem curva, vel in diversis, qui æqualibus tempusculis percurrantur, compleanturque parallelogramma T *u*, *t* V, uti supra; non est dubium, quin sicuti lineæ R L, *r l* expriment velocitates, quibus ipsæ percurruntur (5.), sic etiam lineæ R T, *r t* exprimant velocitates tangentiales, quas corpus habet in punctis *R*, & *r*; lineæ vero R *u*, *r* V velocitates initiales a vi centripeta ortas.

34. Si vis centripeta per universum curvæ tractum perpetuo dirigatur versus idem punctum F, dicitur punctum F centrum virium. Fingi solet hoc centrum perpetuo trahere ad se corpus; hinc oriri vim centripetam. Quamquam vis centripeta ubique fere a nobis considerabitur, uti vis quæpiam urgens perpetuo corpus versus centrum, undecumque tandem oriatur.

35. Quoniam vero quæ infra quærenda sunt, a velocitatibus tantum pendent, quod erit legentibus manifestum; idcirco virium nomine, velocitates tantum ipsas intelligemus, eritque jam nobis vis centri-

tripeta nihil aliud, nisi velocitas ipsa initialis a vi centripeta orta.

36. Quod si duæ rectæ ducantur FR, FP abscindentes in curva arcum quemvis RP, spatium RFP appellabitur area, quam corpus eo tempore dicetur describere, quo tempore percurrit arcum RP. His definitionibus præmissis theoremata quatuor, quorum maximus usus est, exsequamur.

37. *Th.* I. Volvatur corpus per curvam RP, (*Fig.* 5.) sitque F centrum virium. Sume arcum quemvis infinitesimum RL, eum tamen, qui certo tempusculo percurratur. Duc LQ perpendicularem ad FR, tum FT perpendicularem ad tangentem RT. Velocitas, qua corpus percurrit arcum RL, ponatur $= u$. Dico esse $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

Dem. Cum sit angulus LRT infinitesimus, haberi possunt pro æqualibus anguli LRQ, TRF. Quo statim apparet, triangula etiam FRT, RLQ pro similibus haberi posse, esseque FR:FT::RL:LQ, ergo $LQ = \frac{FT \times RL}{RF}$. Atqui arcus RL [quoniam, ubivis sumatur, certo semper tempusculo percurritur] exprimit velocitatem u (5.); ergo $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

38. *Th. II.* Volvatur corpus per curvam quamlibet AQ, (*Fig.* 7.) sitque F centrum virium. Dico, duas quasvis areas AFP, AFQ proportionales esse tempo-

poribus, quibus describuntur.

Id manifestum per se erit, si prius ostendatur, areolas deinceps duas infinitesimas A F R, R F L, quæ æquales quidem sint, æqualibus describi tempusculis. Id ergo ostendamus.

Ducatur L T parallela lineæ R F, secans A R productam in T, compleaturque parallelogrammum T *u*. Hic jam vides esse R *u* vim centripetam, R T vim tangentialem, atque his duabus componi vim, qua corpus fertur per R L (32.)

Ducatur nunc F T. Quo facto apparet statim, triangula R F T; R F L æqualia esse; habent enim eamdem basim R F, suntque inter easdem parallelas L T, R F. Quare cum triangulum R F T æquale sit areæ R F L, atque area R F L posita sit æqualis areæ A F R; erunt triangula R F T, A F R æqualia, & bases A R, R T æquales.

His positis sic colligo. Vis tangentialis est illa ipsa vis, qua corpus fertur per A R, quaque nititur excurrere per R T. Quare cum sit R T = A R, tempus, quo corpus vi tangentiali percurreret R T, æquale est tempori, quo revera percurrit A R; atqui tempus, quo percurreret R T, æquale est etiam tempori, quo percurrit R L (13.); ergo A R, & R L percurruntur æquali tempore: ergo areolæ A F R, R F L æqualibus tempusculis describuntur. Quod ostendendum susceperam.

Nunc jam theorema propositum sic expedio. Quanto plures areolas A F R continebit area A F Q

quam area A F P, tanto etiam pluribus tempuſculis deſcribetur. Ergo erunt areæ A F Q, A F P proportionales temporibus, quibus deſcribuntur. Q. e. d.

39. Licet etiam theorema ſic convertere. Si areæ omnes, terminatæ in eodem punčto F, proportionales ſint temporibus, quibus deſcribuntur, vis centripeta erit ubique direčta ad idem punčtum F.

Sint enim areæ duæ infiniteſimæ A F R, R F L æquales; ideoque arcus A R, R L æqualibus tempuſculis percurrantur. Producatur A R in T, ut ſit R T = A R; ducaturque L T. Facile intelligis, lineam R T exprimere vim tangentialem, lineam R L exprimere vim, qua corpus ex R in L fertur, ideoque eſſe T L parallelam direčtioni, quam vis centripeta habet in R. Præterea, triangula duo R F T, R F L ſunt æqualia (quippe utrumque, ut facile conſtat, æquale eſt triangulo A F R), & inſiſtunt eadem baſi R F; oportet ergo lineam T L, vertices jungentem, parallelam eſſe etiam lineæ R F. Cum ergo T L ſit parallela tum lineæ R F, tum direčtioni vis centripetæ in R, coincidet hæc cum R F, tendetque ad punčtum F.

40. *Tb. III.* Volvantur duo corpora per duas quaſvis curvas R P, *r p*, (*Fig.* 5. 6) ac ſint centra virium F, *f*. Sint arcus duo quivis infiniteſimi R L, *r l*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ R F L, *r f l*; ac tandem ducantur F T, *f t* perpendiculares tangentibus R T, *r t*. Dico, velocitatem corporis in R eſſe ad velocitatem corporis in *r*, uti

eſt

eſt area R F L diviſa per F T ad aream rfl diviſam per ft.

Antequam id demonſtro, placet hoc animadvertere. Propter infinitam parvitatem angulorum L R T, lrt haberi poſſunt triangula R F L, rfl tamquam inſiſtentia tangentibus ipſis R T, rt; ideoque etiam lineæ F T, ft haberi poterunt tamquam ipſorum altitudines. Hoc permiſſo ſic rem demonſtro.

Quoniam R L, & rl percurruntur æquali tempore, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti R L ad rl (5.) Atqui eſt $RL = \frac{RFL}{FT}$, & $rl = \frac{rfl}{ft}$ (eſt enim baſis cujuſvis trianguli æqualis triangulo ipſi diviſo per altitudinem). Ergo velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Q. e. d.

41. Neque id minus tenet, ſi puncta R, & r, ideoque etiam arcus R L, rl, æquali tempuſculo confecti, in eadem curva ſumantur. Valet enim in eadem curva ratio eadem. Et quoniam in eadem curva area R F L eſt conſtans, quippe quia arcum R L eum ſemper ſumi volumus, qui æquali tempuſculo conficiatur (38.), poni poterit $RFL = 1$, eritque velocitas in quovis puncto $R = \frac{1}{FT}$.

42. *Tb. IV.* Volvantur duo corpora per duas quaslibet curvas P V, pu, (*Fig.* 8. 9.) ſintque centra virium F, f. Sumantur duo quivis arcus P V, pu, compleanturque areæ P F V, pfu. Sumantur præterea arcus R L, rl, qui æquali tempore T percurrantur,

 com-

compleanturque etiam areæ R F L, rfl. Dico, tempus, quo percurritur arcus P V, esse ad tempus, quo percurritur arcus pu, uti est area P F V divisa per aream R F L ad aream pfu divisam per aream rfl.

Dem. In curva P V est utique area R F L ad aream P F V, uti tempus T ad tempus, quo percurritur arcus P V (38): ergo tempus, quo percurritur arcus P V, erit $= \frac{PFV \times T}{RFL}$. Similiter in curva pu invenies tempus, quo percurritur arcus pu, esse $= \frac{pfu \times T}{rfl}$. Est ergo illud tempus ad hoc, uti $\frac{PFV \times T}{RFL}$ ad $\frac{pfu \times T}{rfl}$, nempe uti $\frac{PFV}{RFL}$ ad $\frac{pfu}{rfl}$. Q. e. d.

43. Antequam huic capiti finem pono, placet ea breviter recensere, quæ curvam determinant a corpore percurrendam. Sit corpus in R, [*Fig.* 10.] ac centrum virium sit F. Determinata vi centripeta, ejusque directione versus F; si determinata etiam sit vis projectionis, ejusque directio R T, cogetur sane corpus discedere a puncto R, determinatamque directionem R L ingredi, quam, nisi quid aliud superveniat, perpetuo sequatur. Verum supervenit statim attractio nova centri F, quæ ipsum cogit directionem acceptam mutare, atque aliam L Q ingredi. Hujus autem novæ attractionis cum vis tum directio determinantur ex ipso situ, & distantia centri F, atque ex ipsa attractionis lege; quæ determinata si fuerint, determinata erit etiam in corpore directio-

nis

nis mutatio. Hoc modo progredietur corpus perpetuas habens determinatasque directionis mutationes, atque idcirco determinatam curvam percurret.

44. Quæ ergo curvam percurrendam determinant, hæc sunt. Vis centripeta, & vis projectionis, earumque directiones; deinde centri distantia, & attractionis lex. Quæ si eadem maneant omnia, eadem quoque curva a corpore percurrenda erit. Quamquam si horum unum mutetur, modo & aliorum conveniens mutatio fiat, eamdem adhuc curvam percurrere corpus poterit. Nihil enim impedit, quominus datam curvam quamlibet possit corpus percurrere, quantacumque sit vis centripeta, qua trahitur e puncto R versus F. Cur enim dum trahitur versus F, quantacumque trahatur vi, nequeat etiam sic projici, ut vi composita datæ curvæ laterculum ineat? Ubi id peregerit, cur superveniens statim attractio nova centri F non ea esse possit, ut corpus in aliud, quod proxime sequatur, datæ curvæ laterculum se immittat; ac sic deinceps ad latercula alia, atque alia ex certa attractionis lege transeat, omnesque accipiat datæ curvæ directiones? Sed jam de his satis.

CAPUT II.

De revolutione corporis per circulum vi centripeta ad circuli centrum tendente.

VIres centrales in sectionibus conicis explicare ingrediens, exordiar a circulo, quippe qui sectionum conicarum simplicissimus esse creditur.

45. Volvatur corpus per circulum A B (*Fig.* 11.) vi centripeta tendente ad circuli centrum C. Dico, velocitatem, qua per circulum volvitur, esse constantem.

Dem. Percurrat corpus duos quosvis arcus A D, A E, compleanturque areæ A C D, A C E. His positis sic colligo. Arcus A D, A E sunt uti areæ A C D, A C E; atqui hæ areæ sunt uti tempora, quibus arcus A D, A E percurruntur (38); ergo arcus A D, A E sunt uti tempora, quibus percurruntur; ergo velocitas in utroque arcu eadem (6.); ergo constans.

Idem aliter. Velocitas in quovis curve puncto est $\frac{1}{FT}$ (41.), idest unitas divisa per eam perpendicularem, quæ a centro ad puncti tangentem ducitur; quæ perpendicularis in circulo radius est. Atqui unitas divisa per radium constans est: ergo & velocitas.

46. Volvatur corpus per circulum R H (*Fig.* 12.) vi centripeta tendente ad circuli centrum F. Dico,

vim

vim centripetam exprimi tertia proportionali post diametrum, & velocitatem, qua corpus per circulum volvitur.

Dem. Sit arcus infinitesimus R L, quem corpus percurrat certo tempusculo, ducaturque L *u* parallela tangenti R T, secans diametrum R H in *u*; exprimet sane arcus R L velocitatem, qua corpus per circulum volvitur; lineola R *u* vim centripetam (32.). Atqui est R *u* tertia proportionalis post diametrum R H, & arcum R L. Ergo vis centripeta exprimitur tertia proportionali post diametrum, & velocitatem, qua corpus per circulum volvitur.

47. Erit ergo vis centripeta quadratum velocitatis, qua corpus per circulum volvitur, divisum per diametrum. Sit vis centripeta $= G$. Velocitas, qua corpus per circulum volvitur, $= V$; diameter $= D$; erit $G = \frac{VV}{D}$.

48. Hinc patet, vim centripetam G in tota corporis revolutione constantem esse; est enim constans velocitas V (45.), neque minus constans est diameter D.

49. Patet etiam, velocitatem, qua corpus per circulum volvitur, esse radicem vis centripetæ ductæ in diametrum. Si est enim, ut modo diximus, $G = \frac{VV}{D}$, erit etiam $V = \sqrt{DG}$.

50. Porro tempus periodicum erit radix diametri divisæ per vim centripetam. Nam tempus periodi-

dicum est utique circumferentia ipsa, cui substituere diametrum D possumus, divisa per velocitatem (4.). Est ergo tempus periodicum $= \frac{D}{\sqrt{DG}} = \sqrt{\frac{D}{G}}$.

51. *Problema*. Volvatur corpus per circulum A B (*Fig.* 13.) vi centripeta tendente ad circuli centrum C. Fingatur jam cadere versus C e quovis circumferentiæ puncto A, ea vi centripeta, quam habet in circulo, ipsum constanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, qua per circulum volvitur.

Sit diameter $= D$. Velocitas, qua corpus per circulum volvitur, $= V$. Erit vis centripeta $= \frac{VV}{D}$ (47.). Sit jam $AD = x$. Quoniam velocitas, quam corpus, cadendo ex A, obtinet in D, æqualis est duabus radicibus spatii ipsius A D ducti in vim centripetam (29.), erit velocitas in $D = 2\sqrt{\frac{VVx}{D}}$. Pone ergo æquationem $2\sqrt{\frac{VVx}{D}} = V$. Exsistet hinc $x\ (AD) = \frac{D}{4}$. Quæ quarta pars diametri est. Q. e. i.

52. Iisdem positis. Tempus periodicum est ad tempus, quo corpus cadit ex A in D, uti circumferentia ad radium.

Dem. Sit circumferentia $= C$. Erit tempus periodicum $= \frac{C}{V}$ (4.). Tempus, quo corpus cadit ex A in

A in D, est (27.) radix spatii ipsius A D divisi per vim centripetam. Est autem, ut modo ostendimus, spatium $AD = \frac{D}{4}$; vis centripeta $= \frac{VV}{D}$. Erit ergo tempus, quo corpus cadit ex A in D, $= \frac{D}{2V}$. Hic statim vides, esse $\frac{C}{V} : \frac{D}{2V} :: C : \frac{D}{2}$, nempe tempus periodicum esse ad tempus, quo corpus cadit ex A in D, uti est circumferentia ad radium. Q. e. d.

53. Volvantur duo corpora per duos circulos A B, *a b* (*Fig.* 14. 15.) viribus centripetis tendentibus ad centra C, *c*. Si vires centripetæ reciproce proportionales sint quadratis distantiarum C A, *c a*, sive diametrorum A B, *a b*, dico quadrata temporum periodicorum esse proportionalia cubis diametrorum.

Demonstratio sine ullo artificio vel minus attentis se prodit. Sit in circulo A B diameter $AB = D$. Vis centripeta $= G$. Erit tempus periodicum $= \sqrt{\frac{D}{G}}$ (50.), cujus quadratum $= \frac{D}{G}$. Sit in circulo *a b* diameter $ab = d$. Quoniam volumus vires centripetas esse reciproce proportionales quadratis diametrorum, erit in circulo *a b* vis centripeta $= \frac{DD \times G}{dd}$. Tempus periodicum $= \sqrt{\frac{d^3}{DD \times G}}$ (50.), cujus qua-

 dra-

dratum $= \frac{d^3}{DD \times G}$. Statim vides esse $\frac{D}{G} : \frac{d^3}{DD \times G} ::$ $D^3 : d^3$, ideſt quadrata temporum periodicorum proportionalia esse cubis diametrorum. Q. e. d.

54. Volvantur duo corpora per duos circulos A B, *a b* viribus centripetis tendentibus ad centra C, *c*. Si quadrata temporum periodicorum fuerint proportionalia cubis diametrorum, dico, vires centripetas esse reciproce proportionales quadratis diſtantiarum C A, *c a*, ſive diametrorum A B, *a b*.

Hic quoque inutile ſit artificia quærere. Sit in circulo A B diameter A B $= D$. Tempus periodicum $= T$. Quoniam velocitas, qua corpus per circulum volvitur, æqualis eſt circumferentiæ, ſeu diametro, diviſæ per tempus (2.), erit in circulo A B velocitas $= \frac{D}{T}$. Et quia vis centripeta æqualis eſt quadrato velocitatis diviſo per diametrum [47] erit in circulo A B vis centripeta $= \frac{D}{TT}$. Jam vero in circulo *a b* ſit diameter $a\,b = d$. Quoniam volumus, quadrata temporum periodicorum proportionalia esse diametrorum cubis, erit in circulo *a b* tempus periodicum $= \sqrt[2]{\frac{d^3 \times TT}{D^3}}$. Eamdem porro viam inſiſtens, quam modo in circulo A B tenuimus, invenies in circulo *a b* vim centripetam $= \frac{D^3}{dd \times TT}$. Ac jam vides esse $\frac{D}{TT} : \frac{D^3}{dd \times TT} :: dd : DD$, ideſt vires centripe-

tas

tas reciproce proportionales esse quadratis diametrorum. Q. e. d.

55. Volvatur corpus per circulum A B (*Fig.*14) ex attractione massæ M in centro ipso C insidentis. Dico, massam M proportionalem esse cubo diametri, sive radii, diviso per quadratum temporis periodici. Sit diameter $= D$. Tempus $= T$. Dico esse $M = \frac{D^3}{TT}$.

Dem. Velocitas initialis, quam parit attractio, est massa M divisa per quadratum distantiæ (19.), cui distantiæ substituere possumus diametrum ipsam D; est ergo velocitas initialis $= \frac{M}{DD}$. Est etiam velocitas initialis $= \frac{VV}{D}$ (47.); quare cum velocitas V æqualis sit circumferentiæ, cui diametrum D possumus substituere, divisæ per tempus periodicum T, ideoque sit $V = \frac{D}{T}$, & $VV = \frac{DD}{TT}$; erit jam velocitas initialis $\frac{VV}{D} = \frac{D}{TT}$. Pone ergo æquationem $\frac{M}{DD} = \frac{D}{TT}$. Exsistet $M = \frac{D^3}{TT}$. Q. e. d.

56. *Problema*. Dato tempore periodico, quo corpus volvitur per datum circulum A B (*Fig.* 13.) vi centripeta tendente ad centrum C, invenire proportionem, quam habet vis ejus centripeta ad communem terrestrium corporum gravitatem.

Ut est circumferentia ad radium, ita sit tempus

periodicum datum ad tempus aliud K. Experimentales physici te docebunt, quam lineam percurrat terrestre corpus a quiete discedens, ac cadens libere tempore constituto K. Sit ea linea P Q. Sit præterea A D quarta pars diametri A B. Dico, vim centripetam corporis per circulum A B se volventis esse ad communem terrestrium corporum gravitatem, uti A D ad P Q.

Dem. Quoniam ponitur circumferentia ad radium, uti tempus periodicum ad tempus K, sequitur, ut, si corpus cadat libere ex A, vi centripeta, quam habet in A, ipsum constanter urgente, conficiat lineam A D tempore K (52.). Jam vero eodem tempore K terrestre corpus cadens libere conficit lineam P Q; gravitates vero sunt uti spatia eodem tempore percursa (25); ergo vis centripeta corporis se volventis per circulum A B est ad communem terrestrium corporum gravitatem, uti A D ad P Q.

Hæc habui dicere de revolutione corporis per circulum, in quibus exerceri te paululum volo, Torquate suavissime, sic ut eadem demonstres aliter, multisque modis verses, & alia addas, ut in mentem venient. Sic enim & quæ adhuc te docui, breviora ipse facies, atque elegantiora, & ad ea, quæ infra tradentur, paratior accedes.

CA-

CAPUT III.

De revolutione corporis per ellipsim vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quadam e geometria petita.

Circulum ellipsis excipiat, quæ illi est sectionum conicarum omnium quamproxima; qua in curva centrales vires difficiliores paulo esse existimantur, atque obscuriores. Ego illas breviter explanare nitar, & dilucide quantum potero.

Sed antequam revolutionem corporis explico, volo te, Varene suavissime, pauca quædam, quæ quasi lemmata infra assumam, e geometria nunc repetere, ne postea rem mechanicam tractanti in geometrica hærendum sit. Quæ autem demonstrata ab aliis sunt, ea tantum indicabo; quod nusquam alibi demonstratum esse arbitror, id ipse curabo, ut demonstrem.

57. Sit ellipsis A B, (*Fig. 16.*) cujus axis major AB, minor DE, centrum C, focus F. Parameter axis majoris sit P. Hanc parametrum appellabo posthac parametrum ellipseos.

58. His positis, dico primum, lineam F D æqualem esse semiaxi C A. Imo si sumto in ellipsi puncto quovis R, ducatur per C diameter R V; tum diameter conjugata M N, ac tandem linea F R' secans

cans M N in G, erit etiam G R = C A.

59. Dico ſecundo, rectangulum ex C A & C D æquale eſſe parallelogrammo ex C R & C N, ſive C M; ideoque ducta R O perpendiculari ad M N, eſſe C M : C A : : C D : R O.

60. Quod ſi ponatur arcus R L infiniteſimus, iiſdemque poſitis, quæ ſupra poſuimus, ducatur L u parallela tangenti R T, ſecans lineam F R in u; tum linea L Q perpendicularis ad F R; dico eſſe P : L Q : : L Q : R u, ideoque $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Id facile oſtendes, ſi producta L u, donec ſecet diametrum R V in x, & perpendicularem R O in z, animadverteris, triangula duo R uz, L uQ ſimilia eſſe, eſſeque Ru : R z : : L u : L Q. Inventis enim Rz, & L u, facile etiam intelliges quo modo ſe habeat L Q ad R u.

Quæramus igitur primum R z. Cum ſit axis major = 2 C A, parameter vero P, erit axis minor $= \sqrt{P \times 2CA}$, & $CD = \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}$. Eſt autem C M : C A : : C D : R O (59). Erit igitur $RO = \frac{CA \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$. Atqui propter ſimilitudinem triangulorum R G O, R uz, eſt R G, ſive C A (58.) : R O : : R u : R z. Ergo $Rz = \frac{Ru \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$.

Quæ-

Quæramus jam Lu. Primum propter ſimilitudinem triangulorum ROC, Rzx, eſt RO : RC : : Rz : Rx. Hic pro RO, & Rz ſubſtitue valores ſupra inventos, ac ſtatim habebis $Rx = \frac{RC \times Ru}{CA}$. Denique cum poſſit L$u$ confundi cum Lx ordinata ad diametrum RV, eſt enim ux differentia infiniteſima ſecundi ordinis [30.] erit ex ellipſeos natura $\overline{CR}^2$ ad $\overline{CM}^2$, uti $Vx \times Rx$, ſive $2CR \times Rx$, ad $\overline{Lu}^2$. Jam vero ſi pro Rx ſubſtitues valorem ejus modo inventum, erit tibi ſtatim $Lu = CM\sqrt{\frac{2Ru}{CA}}$.

Lineis Rz, Lu ſic inventis, cum ſit, ut initio dixi; Ru : Rz : : Lu : LQ, invenies ſtatim $LQ = \sqrt{P \times Ru}$, unde $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per ellipſim.

16. Volvatur corpus per ellipſim AB (*Fig.* 17.) vi centripeta tendente ad focum F, ſitque parameter ellipſeos = P. Sume arcum quemvis infiniteſimum RL, quem corpus certo, conſtitutoque tempuſculo percurrat, deinde duc LQ perpendicularem ad FR, & FT perpendicularem tangenti RT.

Dico, vim centripetam, quam corpus habet in R,

R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac ſi velocitas, quam corpus habet in R, ſit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonſtro primam partem. Ducatur L u parallela tangenti R T, ſecans F R in u. Exprimet ſane R u vim centripetam, quam habet corpus in R (32). Atqui eſt R $u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (60). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonſtro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo oſtendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eſt $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$ (37), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{FR^2}$. Ergo vis centripeta in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

62. His viſis dico vim centripetam in quovis puncto R ejuſdem ellipſeos eſſe reciproce proportionalem quadrato diſtantiæ a foco F, nempe eſſe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum R L, ubicumque ſit, eum ſemper eſſe, qui æquali tempore percurratur, erit area R F L perpetuo æqualis (38). Sic er-

ergo area R F L = 1. Atqui eſt L Q proportionalis areæ R F L diviſæ per F R (eſt enim altitudo cujuſvis trianguli proportionalis triangulo ipſi diviſo per baſim); ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eſt autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (61.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem ellipſi eſt P conſtans, ideoque e formula expungi poteſt, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

Idem aliter. Eſt vis centripeta $= \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (61); atqui eſt $u = \frac{1}{FT}$ (41.), ideoque $uu = \frac{1}{\overline{FT}^2}$. Ergo vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Expunge conſtantem P. Erit vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

63. His rebus patet & vim centripetam, & velocitatem in ellipſi perpetuo variare; eſt enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (62.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.); quæ quantitates perpetuo variant.

64. Si corpus exſiſtat in vertice A, F T vertitur in F A; ſi in vertice B, in F B. Velocitas ergo

in A $= \frac{1}{FA}$; in B , $= \frac{1}{FB}$. Sunt ergo velocitates in verticibus A , & B reciproce proportionales diſtantiis a foco F . Hæc atque alia permulta horum ſimilia , ſi te paululum exercere volueris , ut velis autem etiam atque etiam hortor , per te ipſe facile invenies .

65. Nunc revolutiones corporum per duas ellipſes diverſas conſideremus . Quo loco illud ante moneo , vires centripetas mihi dici promiſcue ſumtas, ſi aliæ in una curva ſumtæ ſint , aliæ in altera .

66. Volvantur jam ergo duo corpora per duas ellipſes A B , *a b* (*Fig.* 18. 19.) viribus centripetis tendentibus ad focos F , *f* . Vireſque centripetæ , promiſcue ſumtæ , in punctis duobus R , *r* ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F , *f* , ideſt ſit vis centripeta in R ad vim centripetam in *r* , uti $\frac{1}{\overline{FR}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{fr}^2}$; dico tales eſſe vires centripetas promiſcue ſumtas etiam in punctis aliis quibuslibet ; R , *b* , ideſt vim centripetam in R eſſe ad vim centripetam in *b* , uti $\frac{1}{\overline{FR}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{fb}^2}$.

Dem. Eſt , ut ſupponimus , vis centripeta in R ad vim centripetam in *r* , uti $\frac{1}{\overline{FR}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{fr}^2}$; ſed eſt utique vis centripeta in *r* ad vim centripetam in *b*, uti $\frac{1}{\overline{fr}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{fb}^2}$ (62.) ; ergo vis centripeta in R ad vim

vim centtipetam in b, uti $\frac{1}{\overline{FR}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{fb}^2}$. Q. e. d.

67. Volvantur duo corpora per duas ellipses A B, ab (*Fig.* 20. 21.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiscue sumtæ, sint reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis F, f. His positis, sumantur duo quævis puncta R, & r, ducanturque F T, $f t$ perpendiculares tangentibus R T, $r t$. Dico, velocitatem in R esse ad velocitatem in r, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in R $=$ V; in r, $= u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (61). Et quoniam supponimus, vires centripetas, promiscue sumtas, esse reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis, habebimus etiam vim centripetam in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas; $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies V $= \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Est ergo V [velocitas in R]

ad

ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

68. Erit ergo, in hujusmodi ellipsibus, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula, velocitatem exprimens in quovis puncto R.

69. Volvantur duo corpora per duas ellipses A B, $a\,b$ viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiscue sumtæ, sint reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis F, f. His positis sumantur arcus duo infinitesimi R L, $r\,l$, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ R F L, $r f l$. Dico, areas R F L, $r f l$ esse proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, $f t$ perpendicularibus ad tangentes R T, $r\,t$, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ [67.]. Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{ft} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam R F L : rfl : : $\sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

70. Neque id minus valebit, si fuerint arcus R L, $r\,l$, ideoque etiam areæ R F L, $r f l$ assignabiles. Poterunt quippe tempora resolvi in tempuscula totidem inter se æqualia, tum areæ in areolas tempusculis singulis respondentes; ac si singulas areolas cum singulis comparaveris, valebit in omnibus ratio eadem.

71.

71. Volvantur duo corpora per duas ellipses A B, *a b* viribus centripetis tendentibus ad focos *F*, *f*, sintque vires centripetæ, promiscue sumtæ, reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis areæ P F V, *p f u* describuntur, proportionalia esse areis ipsis divisis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, *r l* percursi æquali tempore, compleanturque areæ R F L, *r f l*. Hoc posito sic colligo. Tempora, quibus describuntur areæ P F V, *p f u*, proportionalia sunt areis ipsis divisis per areas R F L, *r f l* (42.). Sed areæ R F L, *r f l* sunt uti radices parametrorum (69.). Ergo tempora, quibus describuntur areæ P F V, *p f u*, proportionalia sunt areis ipsis divisis per radices parametrorum. Q. e. d.

Coroll. Ergo tempora periodica proportionalia sunt totis areis divisis per parametrorum radices.

72. Volvatur corpus per ellipsim A B (*Fig.* 22.) vi centripeta tendente ad focum F. Sitque axis major A B, minor D E, centrum C, parameter P. Præterea, centro F, radio F D, fiat circulus D S; fingamosque, corpus volvi per D S vi centripeta tendente ad centrum F, atque hanc vim centripetam æqualem esse illi, quam corpus, per ellipsim se volvens, habet in ipso puncto D. Quo loco licet obiter animadvertere, eamdem massam esse oportere, quæ sedens in F attractione sua continet corpus tum in ellipsi A B, tum in circulo D S; si enim duæ diversæ massæ essent, non eamdem vim centripetam

pa-

parerent in eodem puncto D. Sed jam ad rem venio.

Dico primum, velocitatem, qua corpus volvitur per circulum DS, æqualem esse illi, quam, se volvens per ellipsim, habet in puncto D.

Dico secundo, tempus periodicum in circulo DS æquale esse tempori periodico in ellipsi AB.

Antequam hæc demonstro, juvat animadvertere, ellipsim AB, & circulum DS revera duas ellipses esse, in quibus vires centripetæ, promiscue sumtæ, reciproce proportionales sunt quadratis distantiarum; nam utique vires centripetæ tales sunt in puncto communi D, quo fit, ut tales quoque esse debeant in punctis aliis quibuslibet (66.)

Demonstro primam partem. Velocitas generatim est $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ (68.), idest radix parametri divisa per eam perpendicularem, quæ a centro virium ad puncti tangentem ducitur. Videamus jam ergo quid ea sit, tum in puncto D ellipseos AB, tum in circulo DS. In ellipsi AB perpendicularis ducta a centro virium F ad tangentem puncti D est æqualis semiaxi CD, idest $= \frac{\sqrt{P \times AB}}{2}$. Ergo velocitas in puncto ellipseos $D = \frac{2\sqrt{P}}{\sqrt{P \times AB}} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$. In circulo DS, cum sit parameter æqualis diametro, idest $= 2FD = AB$ (58.); perpendicularis vero ducta a centro F ad

tan-

tangentem puncti D æqualis sit radio ipsi $FD = \frac{AB}{2}$, sequitur, ut velocitas in puncto circuli D, vel omnino in circulo D S, sit $= \frac{2\sqrt{AB}}{AB} = \frac{2}{\sqrt{AB}}$. Quo statim apparet, velocitates, quas dixi, æquales esse.

Demonstro partem alteram. Tempus periodicum generatim est area totalis divisa per radicem parametri (71.). Cum ergo ellipseos area exprimatur rectangulo axium A B, D E, sitque $DE = \sqrt{P \times AB}$, erit in ellipsi tempus periodicum $= \frac{AB\sqrt{P \times AB}}{\sqrt{P}} = \sqrt{\overline{AB}^3}$. Cum vero circuli D S area exprimatur quadrato diametri $2FD = AB$, sitque parameter æqualis diametro ipsi A B, erit in circulo tempus periodicum $= \frac{\overline{AB}^2}{\sqrt{AB}} = \sqrt{\overline{AB}^3}$. Constat ergo, tempora periodica, quæ dixi, æqualia esse.

73 Volvantur duo corpora per duas ellipses A B, *a b*, (*Fig.* 22. 23.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*.

Dico primum. Si vires centripetæ, in ambabus ellipsibus promiscue sumtæ, sunt reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis, quadrata temporum periodicorum erunt proportionalia cubis axium A B, *a b*.

Dico secundo. Si quadrata temporum periodicorum sunt proportionalia cubis axium A B, *a b*, vires

res centripetæ, in ambabus ellipſibus promiſcue ſumtæ, erunt reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis.

Ut hæc demonſtrem, ſint circuli duo D S, *d s*, per quos volvi ſingamus duo corpora ita plane, uti antea ſuppoſuimus (72.). Hoc poſito.

Demonſtro primam partem. Cum vires centripetæ, in ellipſibus A B, *a b* promiſcue ſumtæ, ponantur reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a punctis F, *f*, facile intelligitur, eas tales eſſe etiam in circulis D S, d *s*. Quod cum ita ſit, jam in circulis D S, *d s* quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis diametrorum (53.): atqui tempora periodica in circulis D S, *d s* æqualia ſunt temporibus periodicis in ellipſibus A B; *a b* (72.), & diametri circulorum D S, *d s* æquales ſunt ellipſium axibus A B, *a b*; ergo etiam in ellipſibus A B, *a b* quadrata temporum periodicorum ſunt proportionalia cubis axium A B, *a b*. Q. e. d.

Id ipſum vel ſupra intelligi potuit (72.), ubi tempus periodicum expreſſimus per $\sqrt{\overline{AB}^3}$. Ea quippe re intelligi ſatis potuit, quadratum ejus exprimi per $\overline{AB}^3$, ideſt per cubum axis.

Demonſtro partem alteram. Quoniam in ellipſibus A B, *a b* quadrata temporum periodicorum ponuntur proportionalia cubis axium A B, *a b*, erunt etiam in circulis D S, *d s* quadrata temporum periodicorum proportionalia cubis diametrorum. Erunt er-

ergo in circulis DS, ds vires centripetæ reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a centris F, f (54.). Quo facile intelligitur, tales eſſe debere vires centripetas promiſcue ſumtas etiam in ellipſibus AB, ab, quibuſcumque in punctis ſumantur. Sunt enim profecto tales in punctis D, d (66.)

Quæſitum. Dato tempore T, dataque area quavis IFG (*Fig.* 59.) quam tempore T deſcribit Cometa, quam aream vocabo R, dataque diſtantia perihelia BF invenire tempus periodicum cometæ.

In planeta cognito, puta in venere, inveniatur area, quam venus deſcribit tempore T, quam aream vocabo A. Ex modo dictis erit A ad R, uti radix parametri orbitæ veneris ad radicem parametri orbitæ cometæ, quam parametrum ponam $= 4p$. Invento ſic parametro orbitæ cometæ ſumatur in FB pars $Fr = q$, ac fiat $Br : BF :: BF : BA$, erit BA axis major orbitæ cometæ. Ac tempus periodicum cometæ, ex ante dictis, erit $\sqrt{\overline{AB}^3}$ comparandum cum tempore periodico veneris.

74. Volvantur duo corpora per duas ellipſes AB, ab, viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Dico, centrales maſſas inſidentes in focis F, f, quarum attractione continentur corpora in ellipſibus AB, ab, eſſe proportionales cubis axium AB, ab diviſis per quadrata temporum periodicorum.

Ut id demonſtrem, ſint duo circuli DS, ds, per quos volvi fingamus duo corpora ita plane, uti

ſuppoſuimus ſupra (72.). Hoc poſito ſic colligo. Sunt utique in circulis D S, *d s* maſſæ centrales, quæ inſident in punctis F, *f*, proportionales cubis diametrorum diviſis per quadrata temporum periodicorum (55.). Atqui diametri circulorum D S, *d s* æquales ſunt axibus A B, *a b*; & tempora periodica in circulis D S, *d s* æqualia ſunt temporibus periodicis in ellipſibus A B, *a b* (72); eædemque ſunt centrales maſſæ, quæ continent corpora tum in ellipſibus, tum in circulis (72.). Ergo maſſæ centrales inſidentes in focis F, *f* proportionales ſunt cubis axium A B, *a b*, diviſis per quadrata temporum periodicorum. Q. e. d.

75. Quare ſi in ellipſibus A B, *a b* quadrata temporum periodicorum proportionalia ſunt cubis axium, oportebit ſane, maſſas centrales æquales eſſe. Nam utique cubi axium diviſi per quadrata temporum periodicorum in utraque ellipſi æquales erunt.

76. Problemate uno tractatiunculam hanc totam concludamus. Volvatur corpus per ellipſim A B (*Fig.* 24.) vi centripeta tendente ad focum F. Fingatur jam cadere e quovis ellipſeos puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per ellipſim, habet in puncto R.

Ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T, ſitque parameter ellipſeos P. His poſitis, ſit veloci-

tas

tas corporis in R $= u$. Erit vis centripeta in eodem puncto R $= \frac{\overline{FT}^2 \times \overline{uu}}{P \times \overline{FR}^2}$ (61.). Sit R D $= x$. Velocitas, quam corpus cadens obtinet in D, est æqualis duabus radicibus spatii ipsius R D ducti in vim centripetam (29.). Ergo erit velocitas in D $= 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$. Pone igitur æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x (R D) $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis post $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Et quoniam quarta proportionalis post $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri ubique est minor, quam R F, idcirco corpus cadens a puncto R propositam velocitatem acquirit prius quam ad focum perveniat.

77. Quod si punctum R constitutum sit in ipso vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit R D $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{P}{4}$. Hæc adhuc de corporis revolutione per ellipsim.

CAPUT VI.

De revolutione corporis vel per parabolam, vel per hyperbolam vi centripeta ad focum tendente.

Miraberis fortasse, mi Torquate, quod cum de ellipsi, satis, ut mihi videor, diligenter, supra egerim, nunc de parabola, atque hyperbola seorsim agere instituam. Quæ enim in duabus his curvis occurrunt, quod per te ipse facile intelliges, eadem fere sunt, quæ in ellipsi, eodemque fere modo demonstrantur; itaque si te superiori capite monuissem, ut quæ legeres, eadem ad ellipsim primum, tum ad parabolam, deinde ad hyperbolam accommodares, videbor facile e duobus capitibus unum facere potuisse, ac breviorem librum contexere. Potuissem etiam generalibus uti formulis, quæ in sectiones omnes convenirent, quæque ad brevitatem videntur factæ. Atque has ego quidem adhibuissem, si tantum in eis considerem, quantum hi solent, qui illas adhibent. Ego vero sic sentio, generales illas formulas ad rerum perceptarum memoriam tuendam valere quidem plurimum, ad res ipsas percipiendas non admodum; quas res profecto numquam satis perceptas habeas, nisi unamquamque prius accurate definiveris, & in suas partes distinxeris, ac demum partes singulas seorsim inspexeris, ac diligenter scrutatus fueris. Porro ex hac inspectione ducuntur plerumque formulæ,

vel

vel certe manifestiores fiunt. Neque vero longiorem me fore existimavi, si hæc scribere ingressus, ubi de ellipsi separatim disseruissem, parabolæ deinde, atque hyperbolæ caput proprium tribuissem. Non enim, puto, plus temporis insumes, caput hoc legens, quam si, superius cum legeres, hærere in locis singulis debuisses, eademque modo ad parabolam, modo ad hyperbolam per te ipse transferre. Ego vero breviorem librum, non eum judico, qui paucioribus paginis contineatur, sed eum, in quo legendo, intelligendoque minus temporis sit insumendum. Itaque ea mihi semper videntur scribi breviter, quæ perspicue scribuntur. Habes, Torquate, consilii nostri rationem. Nunc ad rem ipsam veniamus.

De revolutione corporis per parabolam vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

78. Sit parabola quævis A R, (*Fig.* 25.) vertex A, focus F; parameter axis primarii, sit P. Hanc parametrum appellabo posthac parametrum parabolæ.

Sume in ea punctum quodvis R. Duc F R, deinde F T perpendicularem ad tangentem R T, ac tandem diametrum R D. Dico, parametrum para-

bo-

bolæ P esse $= \frac{\overline{4FT}^2}{FR}$. Dico etiam parametrum diametri RD esse $= 4FR$. Quod si duxeris lineam uz parallelam tangenti RT, quæ secet FR in u, RD in z, erit $Ru = Rz$. Quæ omnia facillima demonstratu sunt.

79. Iisdem positis, sit arcus LR infinitesimus. Ducatur Lz parallela tangenti RT, secansque FR in u, RD in z. Tandem ducatur LQ perpendicularis ad FR. Dico esse $P : LQ :: LQ : Ru$, ideoque $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Dem. Cum sit Lz ordinata ad diametrum RD, respondens abscissæ Rz; sitque diametri RD parameter $= 4FR$ (78.), erit $Lz = \sqrt{4FR \times Rz}$. Ac cum possit Lz confundi cum Lu; est enim uz infinitesima secundi ordinis (30.); sitque $Rz = Ru$ (78.), erit $Lu = \sqrt{4FR \cdot Ru}$. Hoc posito sic colligo. Propter similitudinem triangulorum FRT, LuQ est $FR : FT :: Lu : LQ$. Ergo $FR \times LQ = FT \sqrt{4FR \times Ru}$. Ergo $FR \times LQ^2 = 4FT^2 \times Ru$, & $LQ^2 = \frac{4FT^2}{FR} \times Ru$. Atqui $\frac{4FT^2}{FR} = P$ (78.). Ergo $LQ^2 = P \times Ru$, & tandem $Ru = \frac{LQ^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per parabolam.

80. Volvatur corpus per parabolam A R (*Fig.26.*) vi centripeta tendente ad focum F, sitque parameter $= P$. Sume arcum quemvis infinitesimum R L quem corpus certo tempusculo percurrat; duc deinde L Q perpendicularem ad FR; tum F T perpendicularem tangenti R T.

Dico vim centripetam, quam corpus habet in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac si velocitas, quam corpus habet in R, sit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonstro primam partem. Ducatur L u parallela tangenti R T, secans FR in u. Exprimet sane R u vim centripetam, quam habet corpus in R (32.): atqui est R $u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (79); ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonstro partem alteram. Vis centripeta in R exprimitur, ut modo ostendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; atqui est $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$ (37), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$;

ergo

ergo vis centripeta in R exprimetur etam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

81. His visis dico vim centripetam in quovis puncto R ejusdem parabolæ esse reciproce proportionalem quadrato distantiæ a foco F, nempe esse $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum R L, ubicumque sit, eum semper esse, qui æquali tempore percurratur, erit area R F L perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area R F L $= 1$. Atqui est L Q proportionalis areæ R F L divisæ per F R. Ergo L Q $= \frac{1}{FR}$, & L Q$^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Est autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (80.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem parabola est P constans, ideoque e formula expungi potest, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

82. Satis jam constat & vim centripetam, & velocitatem in parabola perpetuo variare; est enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (81.) velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.), quæ quantitates perpetuo variant. Nunc jam revolutio-

nes corporum per duas diversas parabolas consideremus.

83. Volvantur duo corpora per duas parabolas A R, ar, (*Fig.* 27. 28.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiscue sumtæ, sint reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis F, f. His positis sumantur duo quævis puncta R, r, ducanturque FT, ft perpendiculares tangentibus R T, rt. Dico, velocitarem in R esse ad velocitatem in r, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in R $=$ V; in $r = u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (80.). Erit etiam, uti nunc supponimus, vis centripeta in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies V $= \frac{\sqrt{P}}{FT}$, ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Est ergo V (velocitas in R) ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$; Q. e. d.

84. Erit ergo, in hujusmodi parabolis, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ge-

neralis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

85 Volvantur duo corpora per duas parabolas A R, *a r* viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Sint parametri P, *p*. Vires centripetæ, promiscue sumtæ, sint reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis F, *f*. His positis sumantur arcus duo infinitesimi R L, *r l*, qui æqualibus tempusculis percurrantur, compleantnrque areæ R F L, *r f l*. Dico areas R F L, *r f l* esse proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, *f t* perpendicularibus ad tangentes R T, *r t*, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.); nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (83.). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl :: \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

86. Neque id minus valebit, si fuerint arcus R L, *r l*, ideoque etiam areæ R F L, *r f l* assignabiles. Quod facile intelliges, si ambo tempora in tempuscula totidem resolvas inter se æqualia, tum areas in areolas ipsis respondentes.

87. Volvantur duo corpora per duas parabolas A R, *a r*, (*Fig.* 29. 30.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*, sintque vires centripetæ, promiscue sumtæ, reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quæ-

vis

vis areæ P F V, pfu deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, rl percurſi æquali tempore, compleanturque areæ R F L, rfl. Hoc facto ſic colligo. Tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas R F L, rfl (42.). Sed areæ R F L, rfl ſunt uti radices parametrorum (85.). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

88. *Problema*. Volvatur corpus per parabolam A R (*Fig.* 31.) vi centripeta tendente ad focum F. Puta jam ipſum cadere e quovis parabolæ puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per parabolam, habet in puncto R.

Ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T, ſit que parameter parabolæ $=$ P. His poſitis, ſit velocitas in puncto R $= u$. Erit vis centripeta in eodem puncto R $= \frac{\overline{FT}^2 \times \overline{uu}}{P \times \overline{FR}^2}$ (80.). Sit R D $= x$.

Velocitas, quam corpus cadens obtinet in D, eſt æqualis duabus radicibus ſpatii ipſius R D ducti in vim centripetam (29.). Erit ergo velocitas in D $=$

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{p \times \overline{FR}^2}}$, Pone igitur æquationem

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{p \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x (R D) $=$

$\frac{p \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. Nempe quarta proportionalis poſt $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Quoniam hæc quarta proportionalis ubique æqualis eſt ipſi R F, idcirco corpus cadens, e quocumque parabolæ puncto cadat, tum demum velocitatem quæſitam obtinet, cum ad focum pervenit.

89. Quod ſi punctum R conſtitutum ſit in ipſo vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit

$RD = \frac{p \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{p}{4}$.

De

De revolutione corporis per hyperbolam vi centripeta ad focum tendente.

Lemmata quædam e geometria petita.

90. Sit hyperbola A R. (*Fig.* 32.) Vertex A. Centrum C. Semiaxis primus C A; semiaxis secundus C D. Parameter axis primi sit P. Hanc parametrum vocabo posthac parametrum hyperbolæ. Focus interior sit F, qui nempe intra concavum hyperbolæ est; nam alterum, si quando indicare oportuerit, exteriorem vocabo.

91. Sumto in ea quovis puncto R, ducatur C R semidiameter, & C M semidiameter conjugata. Ducatur F R, producaturque, donec secet C M productam in G. Dico esse $RG = CA$.

92. Dico etiam, rectangulum ex C A, & C D æquale esse parallelogrammo ex C R, & C M. Quare ducta R O perpendiculari ad C M, erit $RO \times CM = CA \times CD$. Unde $CM : CA :: CD : RO$. Quæ demonstratu facillima sunt.

93. Sit jam arcus infinitesimus R L; ducaturque L *u* parallela semidiametro C M, secansque F R in *u*. Ducatur præterea L Q perpendicularis ad F R. Dico esse $P : LQ :: LQ : Ru$; ideoque $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Id facile ostendes, si, producta L *u*, donec secet perpendicularem RO productam in *z*, & semidia-

diametrum CR productam in u, animadverteris, triangula duo Ruz, LuQ similia esse, esseque $Ru : Rz :: Lu : LQ$. Sic enim inventis Rz, & Lu, facile intelliges, quo modo se habeat LQ ad Ru.

Quæramus igitur primum Rz. Cum sit axis primus $= 2\,CA$, erit axis secundus $= \sqrt{P \times 2\,CA}$, & $CD = \sqrt{\frac{P \times CA}{2}}$. Est autem $CM : CA :: CD : RO$ (92.). Erit igitur $RO = \frac{CA\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$. Atqui propter similitudinem triangulorum ROG, Rzu est RG, sive CA [91.] : $RO :: Ru : Rz$. Ergo $Rz = \frac{Ru\sqrt{\frac{P \times CA}{2}}}{CM}$.

Quæramus nunc Lu. Primum propter similitudinem triangulorum ROC, Rzx, est $RO : RC :: Rz : Rx$. Hic pro RO, & Rz substitue valores modo inventos, habebisque $Rx = \frac{RC \times Ru}{CA}$. Deinde cum possit Lu confundi cum Lx ordinata ad diametrum ductam per R, est enim ux differentia infinitesima secundi ordinis (30); sequitur ex ipsa hyperbolæ natura, ut sit $\overline{CR}^2$ ad $\overline{CM}^2$, uti $2\,CR \times Rx$ ad $\overline{Lu}^2$. Hic pro Rx substitue valorem modo inventum, habebisque $Lu = CM\sqrt{\frac{2\,Ru}{CA}}$.

Li-

Lineis R z, L u sic inventis, cum sit, ut initio dixi, $Ru : Rz :: Lu : LQ$, invenies statim $\overline{LQ} = \sqrt{P \times Ru}$; unde $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De revolutione corporis per hyperbolam.

94. Volvatur corpus per hyperbolam A R (*Fig.* 26.) vi centripeta tendente ad focum F, sitque parameter hyperbolæ $= P$. Sume arcum quemvis infinitesimum R L, quem corpus certo tempusculo percurrat. Duc deinde L Q perpendicularem ad F R, tum F T perpendicularem tangenti R T.

Dico, vim centripetam, quam corpus habet in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac si velocitas, quam corpus habet in R, sit $= u$, exprimi vim centripetam etiam per $\frac{\overline{LQ}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

Demonstro primam partem. Ducatur L u parallela tangenti R T secans F R in u. Exprimet sane R u vim centripetam, quam corpus habet in R (32.), atqui est $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (93). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ vim centripetam exprimit. Q. e. d.

Demonstro partem alteram. Vis centripeta in R

exprimitur, ut modo oftendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui eft LQ $= \frac{FT \times u}{FR}$ (37.), ideoque $LQ^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$. Ergo vis centripeta in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$. Q. e. d.

95. His vifis dico, vim centripetam in quovis puncto R ejufdem hyperbolæ effe reciproce proportionalem quadrato diftantiæ a foco F, nempe effe $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum R L, ubicumque fit, eum femper effe, qui æquali tempore percurratur, erit area R F L perpetuo æqualis (38.). Sit ergo area $RFL = 1$. Atqui eft LQ proportionalis areæ R F L divifæ per F R. Ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Eft autem vis centripeta $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (94.). Erit igitur vis centripeta $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. Et quoniam in eadem hyperbola eft P conftans, ideoque e formula expungi poteft, erit tandem vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

96.

96. Constat jam & vim centripetam, & velocitatem in hyperbola perpetuo variare. Est enim vis centripeta $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (95.); velocitas $= \frac{1}{FT}$ (41.); quae quantitates perpetuo variant. Nunc jam revolutiones corporum per duas diversas hyperbolas consideremus.

97. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, ar (*Fig.* 27. 28.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetae, promiscue sumtae, sint reciproce proportionales quadratis distantiarum a focis F, f. His positis sumantur duo quaevis puncta R, & r; ducanturque FT, ft perpendiculares tangentibus RT, rt. Dico velocitatem in R esse ad velocitatem in r, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in R $= V$; in $r = u$. Erit vis centripeta in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2}$ (94). Erit etiam, uti nunc supponimus, vis centripeta in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$; in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo aequationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{fr}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima ae-

quatione elicies $V = \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V (velocitas in R) ad u (velocitatem in r), uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d.

98. Erit ergo, in hujuſmodi hyperbolis, $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

99. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, $a\,r$, viribus centripetis tendentibus ad focos F, f. Sint parametri P, p. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, f. His poſitis ſumantur arcus duo quivis infiniteſimi R L, $r\,l$, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ R F L, $r\,f\,l$. Dico, has areas eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, $f\,t$ perpendicularibus ad tangentes R T, $r\,t$, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (40.), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$. Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo etiam $RFL : rfl : \sqrt{P} : \sqrt{p}$. Q. e. d.

100. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus R L, $r\,l$, ideoque etiam areæ R F L, $r\,f\,l$ aſſignabiles. Quod facile intelliges, ſi ambo tempora in tempuſcu-

ſcu-

ſcula totidem reſolvas inter ſe æqualia, tum areas in areolas ipſis reſpondentes.

101. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas AR, *ar*, (*Fig.* 29. 30.) viribus centripetis tendentibus ad focos F, *f*. Vires centripetæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus duæ quævis areæ PFV, *pfu* deſcribuntur, proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus RL, *rl* percurſi æquali tempore, compleanturque areæ RFL, *rfl*. Tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas RFL, *rfl* (42.); ſed areæ RFL, *rfl* ſunt uti radices parametrorum (99.); ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ PFV, *pfu*, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

102. *Problema*. Volvatur corpus per hyperbolam AR (*Fig.* 31.) vi centripeta tendente ad focum F. Puta jam ipſum cadere e quovis hyperbolæ puncto R verſus F, vi centripeta, quam habet in puncto R, ipſum conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum corpus cadendo pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam, ſe volvens per hyperbolam, habet in puncto R.

Ducatur FT perpendicularis ad tangentem RT; ſitque parameter hyperbolæ $= P$. His poſitis, ſit velocitas in $R = u$. Erit vis centripeta in eodem pun-

ēto $R = \frac{\overline{FR}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (94.). Sit $RD = x$. Velocitas, quam corpus, cadens, obtinet in D, est æqualis duabus radicibus spatii ipsius R D ducti in vim centripetam (29). Erit ergo velocitas in D =

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}}$. Pone igitur æquationem

$2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc x (R D) =

$\frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$ Nempe quarta proportionalis post $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

Et quoniam quarta proportionalis post $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri ubique est major, quam R F, idcirco corpus cadens a puncto R propositam velocitatem non acquirit, nisi ultra focum.

103. Quod si punctum R constitutum sit in ipso vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2} = \frac{P}{4}$.

AP-

APPENDIX AD CAP. IV.

Notissimum apud Mechanicos, nobilissimumque theorema illud est. Si corpus a puncto quopiam trahatur, ea quidem lege, ut sit vis attrahens reciproce proportionalis quadrato distantiæ; atque interim directione, & velocitate qualibet transversim pellatur; percurret sectionem conicam. Demonstrari id solet per calculos, & artificia reconditiora. Ego cum vellem, si possem, hunc etiam locum planiorem facere, in idque incumberem, statim sensi, problematis cujusdam explicatione mihi opus esse e geometria plane petenda. Qua de re cum Canterzanum, quem tu, Varene suavissime, probe nosti, miro ingenio juvenem consuluissem, isque problema propositum apud auctores, quotcumque illi præsto erant, frustra quæsivisset, maluit tandem suum ipse ingenium periclitari, quam Mathematicorum versans volumina tempus terere. Rem ergo totam, eleganti quodam præmisso lemmate, synthetice expedivit, & breviter, ut nihil illi ad summam elegantiam deesse videretur. Quid lemmatis id sit, quoque problema illud spectet, paucis ostendam; demonstrationes prætermittam; quas per te ipse invenias volo, ne Canterzano omnia debeas. Ad quæstionem mechanicam, quam initio proposui, veniam postea.

Lem-

Lemma.

104. SIt sectio quævis conica R P (*Fig.* 33. 34.); cujus axis F A. Sitque F focus ejus sive interior (fig. 33.) (quo casu potest R P vel ellipsis esse, vel parabola, vel hyperbola), sive exterior [fig. 34.] (quo casu non potest esse R P, nisi hyperbola). Sumto in ea puncto quovis R, ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T, atque ut est dimidia pars parametri ad F T, sic sit F T ad F S, sumaturque F S in linea ipsa F R vel ad partem R [fig. 33.], vel ad oppositam (fig. 34.). Hoc facto ducatur linea S T. Dico lineam S T fore parallelam axi F A. Ac lemma quidem huc spectat. Ad problema veniamus.

Problema Geometricum.

105. DAta recta F R (*Fig.* 35. 36. 37. 38.), datoque angulo acuto F R T, sectionem conicam describere, quæ focum habeat, sive interiorem, sive exteriorem in F; deinde sic transeat per R, ut sit R T tangens; ac demum parametrum habeat æqualem datæ lineæ P.

Solutio huc spectat. Ducatur F T perpendicularis ad R T; ac fiat uti dimidia pars lineæ P ad F T, ita F T ad F S, sumaturque F S in F R, vel ad partem R (fig. 35. 36. 37.). vel ad oppositam (fig. 38.), ducaturque indefinita F C parallela T S. Hoc facto pro-

producta T R in V, ducatur per R linea X Y, sic ut anguli V R X, F R T, ad eamdem partem lineæ T V æquales sint.

Hic sane, sumta F S ad partem R, vel linea X Y concurret cum F C ad partem X in X [fig. 35.], vel erit ei parallela (fig. 36), vel concurret cum ea ad partem Y in Y (fig. 37.). Sumta vero F S ad partem oppositam [fig. 38.] numquam non concurret ad partem Y in Y.

In primo casu (fig. 35.) ellipsim describe, quæ focos habeat in F, & X, quæque transeat per punctum R. In secundo casu (fig. 36.) parabolam describe, quæ focum habeat in F, incidente axe in F C, quæque transeat per R. In tertio casu (fig. 37.) hyperbolam describe, quæ focum habeat interiorem in F, exteriorem in Y, quæque transeat per punctum R. In quarto casu (fig 38.) hyperbolam describe, quæ focum habeat interiorem in Y, exteriorem in F, quæque transeat per punctum R. Hæ scilicet sectiones conicæ, in singulis casibus descriptæ, illæ ipsæ erunt, quas invenire oportebat. Quamquam si angulus datus F R T rectus fuerit, problema erit multo expeditius, ac prope omne artificium respuet.

Problema Mechanicum.

106. Projiciatur corpus e puncto R (*Fig.39.*) data quavis directione R T, & data quavis velocitate V. In-

Interim vi centripeta quavis data G trahatur versus datum centrum F; atque ea sit attractionis lex, ut vis attrahens reciproce proportionalis sit quadrato distantiæ a puncto F. Invenire curvam RQ, quam corpus percurret.

Ducatur FT perpendicularis ad RT. Tum constituatur recta RD, per quam si corpus e puncto R cadat, vi G constanter urgente, obtineat in puncto D velocitatem V. Tum fiat uti $\overline{FR}^2$ ad $\overline{FT}^2$, ita RD ad lineam aliam quamdam, cujus quadrupla ponatur linea P; ideoque sit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$. His ad hunc modum constitutis describatur sectio conica RQ (105), cujus focus interior sit punctum F, tangens RT, parameter P. Dico, sectionem conicam RQ esse curvam illam, quam corpus datum percurret.

Dem. Fingamus corpus quodpiam volvi per sectionem conicam, quam descripsimus, RQ, vi centripeta tendente ad focum F, esseque in R vim ejus centripetam $= G$. Id enim fieri posse ostendimus (44). Corpus hoc, quod fingimus, habet profecto in R conditiones omnes, quas habet in eodem puncto R corpus datum, quibusque percurrenda curva determinatur. Nam præter quam quod eamdem habet vim centripetam G, eamdemque distantiam a centro trahente F, eamdemque vis centripetæ directionem; quæ quidem omnia e constructione ipsa constant; habet etiam attractionis legem cum corpore dato communem;

nem; constat quippe, vim centripetam in eo corpore, quod per sectionem conicam volvitur, si utique ad focum tendat, esse reciproce proportionalem quadrato distantiæ (62. 81. 95.). Neque vero dubitari potest, quin corpus, quod fingimus, eamdem etiam habeat projectionis directionem, quam corpus datum; nam habet utique directionem tangentis R T. Habet etiam eamdem velocitatem; nam cum sit $RD = \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$, habet ubique velocitatem, quam haberet in D, si illuc caderet vi G constanter urgente (76. 88. 102.). Hæc autem ex constructione est illa ipsa velocitas V, quam corpus datum habet in puncto R. Ambo ergo hæc corpora, & quod fingimus, & quod datum est, conditiones illas omnes communes habent, quibus percurrenda curva determinatur (44). Ergo eamdem curvam percurrunt. Ergo corpus datum percurrit sectionem conicam R Q. Q. e. d.

Ea re non modo ostendimus, corpus datum sectionem conicam debere percurrere, sed etiam sectionis hujus conicæ inveniendæ viam quamdam aperuimus.

CAPUT V.

De revolutionibus duorum corporum se mutuo trahentium.

ILlud adhuc nobis constans fuit, ut, corporibus duobus se mutuo trahentibus, alterum immobile in centro virium poneremus, alterius conversionem explicaremus. Ponamus nunc mobilia ambo, ac de duorum revolutionibus pauca dicamus. Quod si quæstionem vel ad plura corpora traduxeris, vel in duobus omni modo variaveris; in ea statim incurres, quæ reconditissima habentur, ac difficillima, nec nisi ab excellentissimis mathematicis tractari solent. Ego, quæ prima in hac re occurrunt, vix attingam, ut desiderium excitem; quæ subtiliora sunt, excellentissimis illis relinquam. Sed antequam ad rem venio, lemmatis loco id pono.

107. *Lemma*. Sit punctum C (*Fig.* 40.) positum intra concavum curvæ P Q, sumtoque in curva arcu quovis infinitesimo P E, ducantur C P, C E. Ducatur etiam tangens P D occurrens rectæ C E in D; ac demum ducatur E B parallela C P, secansque P D in B. Dico, lineolam B D esse infinitesimam tertii ordinis.

Dem. Ducatur E G parallela tangenti P D secans C P in G. Hinc sane erit G P infinitesima secundi ordinis (vide 30.), ideoque etiam E B. Jam vero

cum

cum ſit C P : P D : : E B : B D, ſit autem P D infiniteſima, ſi comparetur cum C P; erit etiam B D infiniteſima, ſi comparetur cum E B. Erit ergo B D infiniteſima tertii ordinis. Q. e. d.

108. Quod cum ita ſit, poterit jam ſumi P D pro P B, & D E pro E B. Ideoque ſi corpus quodpiam, vi centripeta tendente verſus C, percurrat arcum P E, putari poterit, lineam P D exprimere velocitatem tangentialem, lineam D E velocitatem initialem a vi centripeta ortam; ac corpus eo tempore percurrere arcum P E, quo tempore ſola vi tangentiali percurreret lineam P D, aut ſola vi centripeta percurreret lineam æqualem lineæ D E.

109. His viſis ad propoſitum venio. Sint corpora duo P, *p* (*Fig.* 41.) ſe mutuo trahentia. Recta P *p* ſic dividatur in C, ut ſit maſſa P ad maſſam *p*, uti C *p* ad C P. Quo facto dicetur C centrum commune gravitatis. Projiciantur jam corpora directionibus contrariis, & parallelis P D, *p d*; ambo quidem æquali vi; ideoque ſint projectionum velocitates reciproce proportionales maſſis (10.) ſitque propterea velocitas corporis P ad velocitarem corporis *p*, uti C P ad C *p*. Projecta ad hunc modum corpora duas curvas P Q, *p q* deſcribent, quibus curvis quid accidat per theoremata tria expediam.

110 *Theor. I.* Lineolæ infiniteſimæ P D, *p d* ea longitudine ſumantur, ut exprimant velocitates projectionum; ideoque ſit P D : *p d* : : C P : C *p*. Ducatur præterea recta D *d*, quæ, ut facile conſtat, tranſibit

bit per C, secabitque curvas PQ, *pq* in E, & *e*. His positis dico primum, arcus P E, *pe* percurri a corporibus æquali tempore. Dico secundo, triangula P E D, *ped* similia esse. Dico tertio, similia quoque esse triangula P C E, *p* C *e*.

Demonstro primam partem. Ex constructione lineolæ P D, *pd* proportionales sunt velocitatibus projectionum; ergo corpora, si vi sola tangentiali ferrentur, percurrerent lineolas P D, *pd* æquali tempore (5.). Atqui quo tempore vi sola tangentiali percurrerent lineolas P D, *pd*, eodem tempore vi composita percurrunt arcus P E, *pe* (108.). Ergo percurrunt arcus P E, *pe* æquali tempore. Quod erat primo demonstrandum.

Demonstro partem alteram. Lineolæ P D, *pd* ex constructione sunt reciproce proportionales massis. Lineolæ D E, *de* exprimunt velocitates initiales (108.), ideoque sunt, & ipsæ reciproce proportionales massis (18.): est ergo D P : D E :: *dp* : *de*. Atqui cum sint P D, *pd* parallelæ, sunt etiam anguli D, *d* æquales. Ergo triangula P E D, *ped* sunt similia. Quod erat secundo loco demonstrandum.

Demonstro partem tertiam. Propter similitudinem triangulorum P E D, *ped*, æquales sunt anguli P E D, *ped*; ergo æquales sunt etiam anguli adjacentes P E C, *pe* C. Quare cum in triangulis P C E, *p* C *e* æquales sint etiam anguli ad verticem C constituti, sequitur, ut triangula P C E, *p* C *e* similia sint. Quod erat tertio loco demonstrandum.

Por-

Porro si lineas P E , *p e* produxeris in H, & *h*, ut sit $PE = EH$, & $pe = eh$; tum duxeris rectam H *h*, quæ sane transibit per C, secabitque curvas P Q, *p q* in punctis M, & *m*; eadem demonstratione, qua modo usi sumus, facile ostendes primum quidem, arcus E M, *e m* percurri æquali tempore; deinde triangula E M H, *e m h* similia esse; tertio demum similia quoque esse triangula E C M, *e* C *m*. Eademque ratio produci in infinitum poterit, donec curvas totas P Q, *pq* expleas.

111. *Theor. II.* Iisdem positis, dico, curvas P Q, *pq* esse similes. Id sic efficio. Propter similitudinem triangulorum P C E, *p* C *e*, quam modo demonstravimus, est $PE : EC :: pe : eC$; itemque propter similitudinem triangulorum E C M, *e* C *m*, est $EC : EM :: eC : em$. Est ergo $PE : EM :: pe : em$. Præterea ex eorumdem triangulorum similitudinibus sequitur, ut sit angulus P E C æqualis angulo *pe* C, & angulus C E M angulo C *em*; ideoque etiam totus angulus P E M toti angulo *p e m*. Sunt ergo curvarum latercula P E, E M, & *p e*, *em* circa æquales angulos proportionalia. Quare cum ratio eadem ad latercula alia omnia transferri possit, constat curvas P Q, *p q* esse similes. Q. e. d.

Ex his, quæ hactenus dicta sunt, corollaria haud pauca duci possunt, quæ demonstratione vix indigent. Horum nonnulla recenseamus.

112. *Corol. I.* Ducta per C recta quavis M *m*, quæ secet curvas P Q, *p q* in M, & *m*, quo tempo-

re

re corpus P percurrit arcum P M, eodem tempore corpus p percurret arcum $p\,m$. Itaque erunt ſemper duo corpora in directum cum puncto C.

113. *Corol. II.* Quoniam eſt $CP : Cp :: CE : Ce$, necnon etiam $CE : Ce :: CM : Cm$, ac ſic deinceps; erit etiam $CP : Cp :: CM : Cm$. Cum ſint ergo C P, & Cp reciproce proportionales maſſis, erunt reciproce proportionales maſſis etiam C M, & $C\,m$. Conſtitutis ergo corporibus in M, & m, erit adhuc punctum C centrum commune gravitatis. Quare volventibus ſe corporibus per curvas PQ, pq, commune gravitatis centrum immotum manebit.

114. *Corol. III.* Quoniam trahentia ſe mutuo corpora, & percurrentia curvas PQ, pq, ſunt ſemper, ut modo dixi, in directum cum puncto C, patet vim centripetam utriuſque corporis ad idem punctum C perpetuo dirigi. Poſſunt ergo ambo corpora in ſuis illis revolutionibus perinde haberi, ut ſi traherentur ab ipſo puncto C ea vi, qua trahunt ſe mutuo.

115. Antequam theorema tertium expedio, placet lemma unum præmittere, quod eſt hujuſmodi. Ducta, ut ſupra, recta quavis $M\,m$, quæ tranſeat per C, ſecetque curvas PQ, pq in M & m, dico eſſe $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Eſt enim, ut in corollario altero monui, $CP : Cp :: CM : Cm$. Ergo $CP + Cp\ (Pp) : CP : CM + Cm\ (Mm) : CM$. Ergo $\overline{Pp}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{Mm}^2 : \overline{CM}^2$, & $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$. Q. e. d. Eadem ratione conſtat eſſe etiam

$\overline{Pp}^2$

$\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 :: \overline{Cp}^2 : \overline{Cm}^2$.

116. *Theor. III.* Iiſdem, ut ſupra, poſitis, ſi corpora ea lege ſe mutuo trahant, ut ſit vis attractiva reciproce proportionalis quadrato diſtantiæ, dico, curvas P Q, *p q* eſſe ſectiones conicas.

Dem. Si corpora ea, quam dixi, lege ſe trahunt, vis, qua trahitur corpus P, dum eſt in P, eſt ad vim, qua trahitur, dum eſt in M, uti $\frac{1}{\overline{Pp}^2}$ ad $\frac{1}{\overline{Mm}^2}$. Quare cum ſit $\overline{Pp}^2 : \overline{Mm}^2 : \overline{CP}^2 : \overline{CM}^2$ (115.), vis, qua corpus P trahitur, dum eſt in P, erit ad vim, qua trahitur, dum eſt in M, uti $\frac{1}{\overline{CP}^2} : \frac{1}{\overline{CM}^2}$. Perinde ergo res eſt, ut ſi corpus trahatur ab ipſo puncto C, quemadmodum in corollario tertio monuimus, eaque lege trahatur, ut ſint vires reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a puncto C. Ergo erit P Q ſectio conica (106.); neque minus erit ſectio conica *p q*, quæ curvæ P Q eſt plane ſimilis.

Inquirenti in hæc diligentius, jucundum erit ſectiones conicas, quas corpora P, & *p* percurrent, earumque formam, & genus, quæque illis accidant, cognoſcere. Quæ is quidem facile comperiet, qui ſuperiora intellexerit, ſeſeque paululum exercuerit. Non committam ego, ut, plura de his ſcribens, hanc tibi, Varene ſuaviſſime, voluptatem præripiam.

AP-

APPENDIX AD CAP. V.

HActenus corporis trahentis nomine intelleximus maſſam quamdam in unum punctum collectam, ex eoque trahentem. Non erit ab re oſtendere ſphæram homogeneam punctum quodvis extra ipſam poſitum ſic ad ſe trahere, quaſi eſſet ipſa tota collecta in ſuum centrum. Quod cum explicatum fuerit ab aliis aliter; eſt etiam nuper a Canterzano noſtro nullis omnino calculis, quo ingenio eſt, & plane ſynthetice demonſtratum. Idem nunc ego, brevitati conſulens, per integrationem quamdam declarabo, ut, ſi integrales calculos nondum forte, Varene mi, didiciſti, amare tamen jam nunc incipias, & libentius diſcas. Ad propoſitum veniens ſic exordior.

115. *Theorema*. Sit A E B F (*Fig.* 42.) ſuperficies ſpherica homogenea, cujus centrum C; trahatque punctum P extra poſitum. Ea vero attractionis lex ſit, ut vires quadratis diſtantiarum reciproce reſpondeant. Dico, ſuperficiem A E B F non ſecus trahere punctum P, ac ſi tota in centrum C collecta eſſet.

Ut id demonſtrem, ducatur per C recta P C, ſecans ſuperficiem ſphæricam in A, & B. Sumtaque abſciſſa quavis A M ducatur per M planum perpendiculare lineæ P B, quod ſignàbit utique in ſuperficie ſphærica circulum quemdam E F. Ducantur denique rectæ A E, P E.

Dem.

Dem. Sit C A $= a$, A P $= b$, A M $= x$. Erit A E $= \sqrt{2ax}$, & P E $= \sqrt{2ax + 2bx + bb}$. Ptoportio radii ad circumferentiam ea fit, quæ r ad c. Invenies jam circulum, cujus radius A E, id est segmentum ipsum superficiei sphericæ E A F, $= \frac{cax}{r}$. Eritque elementum hujus circuli, sive segmenti $= \frac{cadx}{r}$ exprimens zonulam quamdam E F.

Jam vero vis absoluta, qua tota hæc zonula trahit punctum P, erit zonula ipsa divisa per quadratum distantiæ P E, nempe $= \frac{cadx}{r \times 2ax + 2bx + bb}$. Atqui zonula trahit reipsa punctum P, non hac quidem vi absoluta, sed vi alia, quæ componitur ex viribus partium omnium zonulam constituentium, est autem, ut facile ostendi potest, vis absoluta ad vim hanc compositam, uti P E ad P M. Erit ergo vis hæc composita $= \frac{ca}{r} \times \frac{\overline{x+b} \times dx}{\overline{2ax + 2bx + bb}^{\frac{3}{2}}}$. Quam formulam commodius integraveris, si ponens $2a + 2b = e$, ipsam sic exscripseris $\frac{ca}{r} \times \frac{xdx}{\overline{ex + bb}^{\frac{3}{2}}} + \frac{bdx}{\overline{ex + bb}^{\frac{3}{2}}}$. Ubi enim sic exscripseris, si feceris $ex + bb = z$, paratissima tibi erit integratio, qua confecta integrale prodibit $= \frac{2ca}{eer} \times \frac{ex + 2bb - be}{\sqrt{ex + bb}}$; quod utique ex-

exprimet vim, qua totum segmentum E A F trahit punctum P, nisi si constans quæpiam addenda sit, aut demenda.

Id ergo sic exploremus. Non est dubium, quin si sit x, idest A M, $= o$, vis quoque ipsa, qua segmentum E A F trahit punctum P, evadat $= o$. Atqui integrale propositum, si sit $x = o$, non utique evadit ipsum $= o$, sed vertitur in constantem $\frac{2ca}{eer} \times \overline{2b - e}$. Hæc ergo constans integrali proposito demenda erit. Quod ubi feceris, si in locum e restitueris ejus valorem $2a + 2b$, exsistet tandem integrale $\frac{ca}{r \times \overline{a+b}^2} \times \frac{\overline{ax + bx - ab + a}}{\sqrt{2ax + 2bx + bb}}$. Idque generatim vim exprimet, qua segmentum quodvis E A F trahit punctum P.

Fac ergo $x = 2a$, nempe A M $=$ A B. Erit tibi integrale modo inventum $= \frac{2aac}{r \times \overline{a+b}^2}$, quo sane exprimetur vis, qua superficies sphærica tota A E B F trahit punctum P.

Quæramus nunc vim illam, qua superficies eadem A E B F traheret punctum P, si tota quidem in centrum C collecta esset. Quoniam superficies sphærica, ut notum est, æquat circulos quatuor maximos, ea sane erit $= \frac{2aac}{r}$. Quod si dividatur per qua-

dra-

dratum diſtantiæ P C, ideſt per $\overline{a + b}^2$, fiet jam $= \frac{2aac}{r \times \overline{a+b}^2}$. Quo exprimetur vis illa, qua ſuperficies ſphærica A E B F traheret punctum P, ſi tota quidem in centrum C collecta eſſet.

Non ſecus ergo ſupeificies ſphærica A E B F, quam initio propoſuimus, trahit punctum P, ac ſi tota in centro C ſita eſſet.

Hoc idem ad ſphæram ſolidam, atque homogeneam transferes; ſphæram ipſam in ſuperficies ſphæricas infinitas, & concentricas reſolvens. Valebit enim in ſuperficiebus ſingulis ratio eadem, ideoque etiam in omnium ſumma, ideſt ſphæra ipſa.

CAPUT VI.

De vi repulſiva.

NOn omnino videar, mi Torquate, hujus libri titulo ſatisfeciſſe, niſi & vim repulſivam, eamque, quæ inde oritur, corporis per hyperbolam converſionem paucis explicem. Id faciam breviter & quaſi curſim; qui enim ſuperiora intellexerit, in his diligentiam minus deſiderabit.

118. Adhuc finximus ineſſe in corporibus attractivam vim quamdam, qua ſe mutuo trahant. Fingamus nunc ineſſe in ipſis vim repulſivam, qua ſe

mutuo repellant; atque ut vim attractivam æstimari voluimus producto massarum se mutuo trahentium diviso per distantiæ quadratum, sic nunc vim repulsivam æstimemus. Repellant se mutuo corpora duo A, & B. Sit massa corporis A $=$ M; corporis B $= m$. Distantia, quæ inter corpora intercedit, $=$ D. Erit vis repulsiva $= \frac{M\,m}{D\,D}$.

119. Satis constat, vim repulsivam æque urgere utrumque corpus, quidquid enim repellit, eadem actione repellitur. Quare ut in attractionibus corporum, sic etiam in repulsionibus velocitates initiales reciproce proportionales sunt massis (10.). Sed hæc, atque alia mittamus, quæ per se quisque facile intelliget. Pauca tantum de repulsione constanti moneamus.

120. Quamquam & hæc erunt expeditissima, si modo intelligatur corpus B, (*Fig.* 43.) dum certa vi pellitur a corpore A versus D, perinde haberi posse, ac si æquali vi traheretur a corpore quopiam posito ad partem D; eumdem quippe motum, eamdemque velocitatem utrovis modo accipiet. Quare si pellatur ex parte A vi costanti, perinde erit, ac si gravitate constanti traheretur ad partem D, eademque illi accident, quæ supra explicavimus, ubi de gravitate constanti egimus.

121. Si ergo corpus B, vi repulsiva constanti actum, excurrat libere versus D, erit spatium, per quod excurrit, in proportione composita vis repulsi-

væ,

væ, qua urgetur, & quadrati ejus temporis, quod in illo excursu insumit (25). Sit spatium $= S$, vis repulsiva $= G$, tempus $= T$. Erit $S = G T T$.

122. Ideoque tempus recte exprimes per radicem spatii divisi per vim repulsivam, nempe $T = \sqrt{\frac{S}{G}}$.

123. Velocitas excursus, quoniam exprimitur spatio diviso per tempus, exprimetur per $\sqrt{G S}$, nempe per radicem spatii ducti in vim repulsivam.

124. Velocitas vero in fine excursus, quoniam est dupla velocitatis illius, qua spatium excurritur, exprimetur per $2\sqrt{G S}$. Quæ manifesta satis erunt, ea repetenti, quæ supra de gravitate constanti tradidimus.

De motu curvilineo ex vi repulsiva.

125. Quoniam corpus incedens per curvam quamlibet R P (*Fig.* 44.) vim facit in quolibet puncto R, ut per tangentem R T excurrat; oportet profecto, si curvam quidem sequi debeat, ut vi alia quapiam urgeatur versus aliquod punctum *u* positum intra concavum curvæ. Quod si vis hæc illi adveniat a puncto quopiam F, ad convexam curvæ partem posito, vis repulsiva appellabitur.

126. Sumto arcu quovis infinitesimo R L, si ducatur L *u* parallela tangenti R T, secansque lineam F R productam in *u*, compleaturque parallelogrammum

mum T u, exprimet fane linea R L velocitatem, qua corpus fertur ex R in L, linea R T velocitatem tangentialem, linea R u vim repulfivam, feu velocitatem initialem a vi repulfiva ortam. Hæc per fe fatis patent.

127. Quod fi per univerfum curvæ tractum vis repulfiva ab eodem femper puncto F prodeat, dicetur F centrum repulfionis. Ac fi duæ rectæ ducantur F R, F P abfcindentes in curva arcum quemvis R P, fpatium R F P dicetur area. His præmiffis theoremata quatuor paucis explicemus.

128. *Th. I.* Volvatur corpus per curvam R P (*Fig.* 45.) ex repulfione centri F. Sumto arcu infinitefimo R L, quem certo tempufculo corpus percurrat, ducatur L Q perpendicularis ad F R; tum F T perpendicularis tangenti R T. Velocitas, qua corpus percurrit arcum R L, ponatur $= u$. Dico effe $LQ = \frac{FT \times u}{FR}$.

Dem. Cum fit angulus L R T infinitefimus, anguli L R F, T R F haberi poffunt tamquam æquales, ac triangula ipfa L R Q, T R F tamquam fimilia. Quo pofito erit F R : F T : : R L : L Q. Ergo T $Q = \frac{FT \times RL}{FR}$. Atqui exprimit R L velocitatem u; ergo

$LQ = \frac{FT \times u}{FR}$. Q. e. d.

129. *Th. II.* Volvatur corpus per curvam quamlibet A Q (*Fig.* 46.) ex repulfione centri F. Dico, duas

duas quasvis areas A F P, A F Q proportionales esse temporibus, quibus describuntur.

Erit id expeditissimum, si illud modo ostendatur, areolas deinceps infinitesimas A F R, R F L, quæ quidem æquales sint, æqualibus describi tempusculis. Id ergo ostendamus.

Ducatur L T parallela lineæ R F, secans A R productam in T, compleaturque parallelogrammum *Tu*. Hic jam patet, esse R *u* vim repulsivam, R T vim tangentialem, atque his duabus componi vim, qua corpus fertur per R L. Ducatur jam F T. Hic statim apparet, triangula R F T, R F L æqualia esse; quippe quæ habent eamdem basim R F, suntque inter easdem parallelas L T, R F. Quare cum triangulum R F T æquale sit areæ R F L, atque area R F L posita sit æqualis areæ A F R, erunt triangula R F T, A F R æqualia, & bases A R, R T æquales.

His positis sic colligo. Vis tangentialis, quam exprimit R T, est illa ipsa vis, qua corpus fertur per A R, quaque nititur excurrere per R T. Quare cum sint A R, R T æquales, tempus, quo corpus vi tangentiali percurreret R T, æquale est tempori, quo percurreret A R; atqui tempus, quo percurret R T, æquale est tempori, quo percurrit R L (13); ergo A R, & R L percurruntur æquali tempore, atque areolæ A F R, R F L æqualibus tempusculis describuntur.

Quapropter erunt areæ A F P, A F Q proportionales temporibus, quibus describuntur; quot enim ex infinitesimis hisce areolis utraque illarum continet;

net, tot etiam tempusculis describitur.

130. *Theor. III.* Volvantur duo corpora per duas quasvis curvas R V, *r u*; (*Fig.* 47. 48.) ac sint centra repulsionum F, *f*. Sint arcus duo quivis infinitesimi R L, *r l*, qui æquali tempore percurrantur, compleanturque areæ R F L, *r f l*; ac tandem ducantur F T, *f t* perpendiculares tangentibus R T, *r t*. Dico, velocitatem corporis in R esse ad velocitatem corporis in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$.

Hic sane propter infinitam parvitatem angulorum L R T, *l r t* dicentur triangula R F L, *r f l* insistere tangentibus ipsis R T, *r t*; eruntque ipsorum altitudines F T, *f t*. Hoc posito rem demonstro.

Quoniam R L, & *r l* percurruntur æquali tempore, erit velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti R L ed *r l* (5). Atqui est $RL = \frac{RFL}{FT}$, & $rl = \frac{rfl}{ft}$; ergo velocitas in R ad velocitatem in *r*, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$. Q. e. d.

131. Neque id minus tenet, si puncta R, & *r*, ideoque etiam arcus R L, *r l*, æquali tempusculo confecti, in eadem curva sumantur. Et quoniam in eadem curva area R F L est constans (129), ideoque $= 1$, erit velocitas in quovis puncto R ejusdem curvæ $= \frac{1}{FT}$.

132. *Theo. IV.* Volvantur duo corpora per duas quas-

quaslibet curvas V P, up; (*Fig.* 49. 50.) ac sint centra repulsionum F, f, Sumantur duo quivis arcus V P, up, compleanturque areæ V F P, ufp. Sumantur præterea arcus R L, rl, qui æquali tempore T percurrantur, compleanturque etiam areæ R F L, rfl. Dico, tempus, quo percurritur arcus V P, esse ad tempus, quo percurritur arcus up, uti est area V F P divisa per aream R F L, ad aream ufp divisam per aream rfl, nempe uti $\frac{VFP}{RFL}$ ad $\frac{ufp}{rfl}$.

Dem. In curva V P est utique area R F L ad aream V F P, uti tempus T ad tempus, quo percurritur arcus V P (129). Ergo tempus, quo percurritur arcus V P, erit $= \frac{VFP \times T}{RFL}$. Similiter in curva up invenies tempus, quo percurritur arcus up; esse $= \frac{ufp \times T}{rfl}$. Est ergo illud tempus ad hoc, uti $\frac{VFP \times T}{RFL}$ ad $\frac{ufp \times T}{rfl}$, idest uti $\frac{VFP}{RFL}$ ad $\frac{ufp}{rfl}$. Q. e. d.

De corporis revolutione per hyperbolam ex vi repulsiva foci exterioris.

Lemmata quædam e geometria petita.

133. Sit hyperbola A R P; (*Fig.* 51.) vertex A; focus interior f, exterior F. Ducantur ad quodvis e-

jus punctum R rectæ F R , fR. Sit S T tangens in puncto R. His confectis sumatur arcus R L, & ducatur L u parallela tangenti S T, secansque fR in V, & F R productam in u. Dico esse R u , R V æquales.

Dem. Angulus u R S æqualis est angulo T R F, cum sint ambo ad verticem. Angulus T R F ex natura hyperbolæ æqualis est angulo fR T. Ergo anguli u R S, fR T, sive V R T, æquales. Atqui anguli u R S, V R T æquales sunt angulis $R\,u$ V, R V u propter parallelas S T, u V. Ergo æquales etiam anguli R u V, R V u. Ergo æquales etiam lineæ R u, R V. Q. e. d.

134. Iisdem positis, puta arcum R L esse infinitesimum, atque a puncto L duc L Q, L q perpendiculares ad F R, fR. Dico esse L Q, L q æquales.

Dem. Anguli L R Q, L R q haberi possunt pro æqualibus, non enim differunt, nisi propter angulum infinitesimum T R L. Quare triangula L R Q, L R q præter duos angulos rectos in Q & q, habent etiam duos alios æquales angulos L R Q, L R q. Ergo sunt similia. Ac cum habeant communem hypotenusam R L, erunt L Q, L q æquales. Q. e. d.

135. Iisdem positis sit parameter $=$ P. Dico esse R $u = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$.

Dem. Est utique R V $= \frac{\overline{Lq}^2}{P}$ (93). Atqui est L Q $=$ L q

$= Lq$ (134.), & $Ru = RV$ (133). Ergo erit etiam $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Q. e. d.

De corporis revolutione per hyperbolam ex vi repulsiva.

136. Volvatur corpus per hyperbolam AR (*Fig.* 52.) ex repulsione foci P; sitque parameter hyperbolæ $= P$. Sume arcum quemvis infinitesimum RL, quem corpus certo tempusculo percurrat. Duc deinde LQ perpendicularem ad FR, tum FT perpendicularem tangenti RT. Dico, vim repulsivam, qua corpus urgetur in R, exprimi per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$; ac si velocitas, quam corpus habet in R, sit $= u$, exprimi vim repulsivam etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{L \times \overline{FR}^2}$.

Demonstro primam partem. Ducatur Lu parallela tangenti RT, secans FR productam in u. Exprimet sane Ru vim repulsivam, qua corpus urgetur in R. Atqui est $Ru = \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (135). Ergo $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$ exprimit vim repulsivam.

Demonstro partem alteram. Vis repulsiva in R exprimitur, ut modo ostendi, per $\frac{\overline{LQ}^2}{P}$. Atqui est LQ

 =

$= \frac{FT \times u}{FR}$ (128); ideoque $\overline{LQ}^2 = \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{\overline{FR}^2}$. Ergo vis repulsiva in R exprimitur etiam per $\frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$.

137. His visis, dico, vim repulsivam in quovis puncto R ejusdem hyperbolæ esse reciproce proportionalem quadrato distantiæ a foco F, nempe esse $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Dem. Quoniam volumus, arcum RL eum semper sumi, qui æquali tempore percurratur, erit area RFL perpetuo æqualis (129). Sit ergo area RFL $= 1$. Atqui est LQ proportionalis areæ RFL divisæ per FR; ergo $LQ = \frac{1}{FR}$, & $\overline{LQ}^2 = \frac{1}{\overline{FR}^2}$.

Est autem vis repulsiva $= \frac{\overline{LQ}^2}{P}$ (136). Erit ergo vis repulsiva $= \frac{1}{P \times \overline{FR}^2}$. rejectaque constante P, $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$. Q. e. d.

138. Constat ergo & vim repulsivam, & velocitatem perpetuo variare. Est enim vis repulsiva $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$ (137); velocitas $= \frac{1}{a T}$ (131); quæ quantitates perpetuo variant.

139.

139 Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, $a\,r$ (*Fig.* 53. 54) ex repulſionibus focorum F, f. Sint parametri P, p. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. His poſitis ſumantur duo quævis puncta R, & r, ducanturque F T, $f\,t$ perpendicolares tangentibus R T, $r\,t$. Dico, velocitatem in R eſſe ad velocitatem in r, uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{P}}{ft}$.

Dem. Sit velocitas in R $=$ V; in $r = u$. Erit vis repulſiva in R $= \frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2}$; in $r = \frac{\overline{ft}^2 \times u\,u}{P \times \overline{fr}^2}$ (136). Erit etiam, uti nunc ſupponimus, vis repulſiva in R $= \frac{1}{\overline{FR}^2}$, in $r = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. Pone ergo æquationes duas $\frac{\overline{FT}^2 \times VV}{P \times \overline{FR}^2} = \frac{1}{\overline{FR}^2}$, & $\frac{\overline{ft}^2 \times uu}{p \times \overline{fr}^2} = \frac{1}{\overline{fr}^2}$. E prima æquatione elicies V $= \frac{\sqrt{P}}{FT}$; ex altera elicies $u = \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Eſt ergo V $: u :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Q. e. d. Erit ergo in hujuſmodi hyperbolis $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ generalis formula velocitatem exprimens in quovis puncto R.

140. Volvantut duo corpora per duas hyperbolas A R, $a\,r$, ex repulſionibus focorum F, f. Sint pa-

parametri P, p. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis F, f. His poſitis ſumantur arcus duo quivis infiniteſimi R L, rl, qui æqualibus tempuſculis percurrantur, compleanturque areæ R F L, rfl. Dico, has areas eſſe proportionales radicibus parametrorum.

Dem. Ductis F T, ft perpendicularibus ad tangentes R T, rt, erit velocitas in R ad velocitatem in r, uti $\frac{RFL}{FT}$ ad $\frac{rfl}{ft}$ (130), nec non etiam uti $\frac{\sqrt{P}}{FT}$ ad $\frac{\sqrt{p}}{ft}$ (139). Erit ergo $\frac{RFL}{FT} : \frac{rfl}{ft} :: \frac{\sqrt{P}}{FT} : \frac{\sqrt{p}}{ft}$. Ergo R F L : rfl :: $\sqrt{P}$: $\sqrt{p}$. Q. e. d.

141. Neque id minus valebit, ſi fuerint arcus R L, rl, ideoque etiam areæ R F L, rfl, aſſignabiles. Poterunt quippe tempora in tempuſcula totidem reſolvi inter ſe æqualia, & areæ in areolas totidem ipſis reſpondentes.

142. Volvantur duo corpora per duas hyperbolas A R, ar (*Fig.* 55. 56.) ex repulſionibus focorum F, f. Vires repulſivæ, promiſcue ſumtæ, ſint reciproce proportionales quadratis diſtantiarum a focis. Dico, tempora, quibus deſcribuntur duæ quævis areæ P F V, pfu proportionalia eſſe areis ipſis diviſis per radices parametrorum.

Dem. Sint arcus R L, rl percurſi æquali tempore, compleanturque areæ R F L, rfl. Tempora quibus

bus deſcribuntur areæ P F V, pfu, proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per areas R F L, rfl (132); ſed areæ R F L, rfl, ſunt uti radices parametrorum (140). Ergo tempora, quibus deſcribuntur areæ P F V, pfu proportionalia ſunt areis ipſis diviſis per radices parametrorum. Q. e. d.

143. *Problema*. Volvatur corpus per hyperbolam A R (*Fig.* 57.) ex vi repulſiva foci F. Puta jam ipſum, dum eſt in R, ſola repulſione abripi, atque excurrere ab R verſus D per lineam F R productam in D, ea vi repulſiva, qua urgebatur in R, ipſum perpetuo, & conſtanter urgente. Invenire punctum D, ad quod cum pervenerit, obtineat velocitatem æqualem illi, quam ſe volvens per hyperbolam habebat in puncto R.

Ducatur F T perpendicularis ad tangentem R T; ſitque parameter hyperbolæ $=$ P. His poſitis, ſit velocitas in R $= u$. Erit vis repulſiva in eodem puncto R $= \frac{\overline{FT}^2 \times uu}{P \times \overline{FR}^2}$ (136). Sit R D $= x$. Velocitas, quam corpus, excurrens ex R verſus D, obtinet in ipſo puncto D, æqualis eſt duabus radicibus ſpatii ipſius R D ducti in vim repulſivam [124]. Erit ergo velocitas in D $= 2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Pone ergo æquationem $2\sqrt{\frac{\overline{FT}^2 \times uu \times x}{P \times \overline{FR}^2}} = u$. Prodibit hinc

x

$\times$ (R D) $= \frac{P \times \overline{FR}^2}{4 \times \overline{FT}^2}$, nempe quarta proportionalis post $\overline{FT}^2$, $\overline{FR}^2$, & quartam partem parametri. Q. e. i.

144. Quod si punctum R constitutum sit in ipso vertice A, quoniam ibi F T vertitur in F R, erit R D $= \frac{P}{4}$.

145. *Problema*. Proiiciatur corpus e puncto R (*Fig.* 58.) data quavis directione R T, & data quavis velocitate V. Interim vi repulsiva quavis data G pellatur a dato centro F. Repulsionis autem lex ea sit, ut vis repellens reciproce proportionalis sit quadrato distantiae. Invenire curvam R Q, quam corpus percurret.

Quaestionem sic expedio. Ducatur F T perpendicularis ad R T. Tum producta F R indefinite in D, fingatur corpus sola repulsione abreptum, excurrere ab R versus D vi repulsiva G ipsum perpetuo, & constanter urgente; inveniaturque punctum D, ad quod cum corpus pervenerit, obtineat velocitatem aequalem datae velocitati V. Constituta ad hunc modum linea R D, fac esse, uti $\overline{FR}^2$, $\overline{FT}^2$, ita R D ad lineam aliam quamdam, cujus quadrupla ponatur linea P. His confectis describatur hyperbola R Q (105), cujus focus exterior sit F, tangens R T, parameter P. Dico hyperbolam R Q esse curvam illam, quam corpus datum percurret.

De-

Demonſtratio ſimillima illius eſt, quam ſupra (106.) indicavimus de vi attractiva agentes, ubi problema ſimillimum propoſuimus. Ad quam ſi redeas, & omnia, uti convenit, huc rite transferas, tibi ipſe facile in hoc etiam problemate, quod de vi repulſiva ponitur, ſatisfacies.

CONCLUSIO.

HAbes adhuc, mi Torquate, nobiliſſimæ illius ſcientiæ, quæ de viribus centralibus tradi ſolet, prima quaſi elementa; quæ ne contemnas velim, propterea quod, nullum certum corpus ſpectantia, in genere ipſo conſiſtant, ideoque in cogitatione tantum poſita eſſe videantur; nam neque illa, quæ in cogitatione tantum ſunt poſita, contemni prorſus debent; & his quidem, quæ adhuc accepiſti, ſi obſervationes modo nonnullæ acceſſerint, ſtatim ſenties, expreſſam quamdam adſpectabilis hujus mundi formam, & quaſi imaginem contineri. Quam imaginem adumbrabo hic leviter, tamquam rudis pictor; tu illam perficies aliquando, ſi voles, atque ornabis; velle autem debebis, ubi & obſervationes plures, ſubtilioreſque collegeris, & longius in hac ipſa virium centralium doctrina provectus fueris.

Ac primum quidem, ut ab initio ultimo exordiar, certiſſimis aſtronomorum obſervationibus ſatis conſtat, planetas omnes circa ſolem volui, mercu-

rium breviori ambitu, venerem latiori; quam deinde mars excipit, tum jupiter, atque is demum, qui omnes sua conversione complectitur, saturnus. Atque hi quidem planetæ primarii dicuntur. His Copernicus terram addit inter veneris & martis orbitas sitam; quam hypothesim assumunt plerique omnes, simplicitate rei ducti atque elegantia. Quid quod commodissima est ad omnia?

Sunt autem planetæ alii minores, qui circa primarios volvuntur, eorumque satellites appellantur. Horum quatuor volvuntur circa jovem, quinque circa saturnum; ac si terram in planetis primariis numeramus, erit ei luna pro satellite. Satellites planetæ etiam secundarii dicuntur.

Ad primarios redeamus. In his Keplerus philosophus longe præstantissimus observationes habet duas; quibus nihil illustrius; quæ quoniam perpetuæ sunt, habentur pro legibus. Duas has leges, sive observationes, seorsim consideremus, ut appareat, quid, his positis, generalis virium centralium theoria in planetis nos doceat.

Primà Kepleri lex est: Cum planeta quisque per ellipsim quamdam volvatur, cujus focum alterum sol occupat; suum sic motum in ea revolutione temperat, ut areæ, quæ in illo foco, ubi sol sedet, terminantur, proportionales sint temporibus, quibus a planeta describuntur.

Hic jam, si ea consulas, quæ supra numero 39 tradidimus, & facile & statim intelliges, vim quam-

dam

dam in natura esse oportere, quæ planteas singulos perpetuo urgeat versus eum focum, quem sol tenet; perinde ac si ipse sol planetas singulos ad se traheret, nihilque aliud esset in planetis singulis vis centripeta, quam ipsa solis attractio. Hinc omnis Nevtonianorum physica manasse videtur.

Quod si ea repetas, quæ numeris 61, & 62 demonstravimus, compertum jam tibi erit, vim centripetam cujusque planetæ sic per totum ejusdem planetæ cursum variare, ut sit ubique reciproce proportionalis quadrato distantiæ a sole. Ac si ellipseos, quam planeta percurrit, & majorem axem cognitum habeas & parametrum (utrumque autem ex observatione cognosces) nihil jam erit expeditius, quam vires centripetas varias, quas planeta idem in datis quibuslibet punctis obtinet, inter se comparare. Neque minus velocitates comparare poteris, si ea repetas, quæ numeris 40, & 41 demonstrata sunt; nam varias esse in eodem planeta etiam velocitates, ex numero 63 apparet. Hæc tibi erunt e prima Kepleri lege, si vel tantisper ad generalem, quam tradidimus, theoriam respexeris, apertissima.

Altera Kepleri lex est. Si duorum quorumlibet planetarum conversiones inter se conferantur, numquam non invenientur quadrata temporum periodicorum proportionalia cubis axium majorum.

Licet jam ergo illud ad planetas transferre, quod numero 73 demonstravimus, ac statuere vires centripetas duorum quorumlibet planetarum, si inter se

 con-

conferantur, reciproce proportionales esse quadratis distantiarum a sole. Quo statim apparet, solem (si vis quidem planetarum centripeta solis attractio est) attractivam nescio quam vim ad omnia planetarum spatia diffundere, quæ sit ubique quadrato distantiæ proportionalis; planetasque omnes eodem attractionis genere a sole trahi.

Hic jam vides, quid illa sit adeo celebris planetarum in solem gravitatio, in qua Nevtoniani adeo gloriantur. Jure illi quidem ac merito. Quamquam gravitationem nescio quam & Keplerus, vir longe gravissimus, præsensisse fertur, & Cartesius explicasse, philosophus cum excellentissimo quoque comparandus; nulla est enim philosophiæ pars, in qua non longe præstiterit. Sed ille cum gravitationis opinionem e vortice quodam suo deduxisset; nutante vortice opinio quoque nutare visa est; ut melius sibi consuluisse Nevtoniani videantur, qui observatione, & mathematica ratione contenti gravitationem posuerunt, causam quærere noluerunt. Sed ad propositum redeamus.

Cum sint ergò vires centripetæ duorum quorumlibet planetarum, si inter se comparentur, reciproce proportionales quadratis distantiarum a sole; jam illa omnia ad planetas traduci poterunt, quæ numeris 67. 69. 70. 71. disseruimus. Quare & velocitates, quas duo quivis planetæ, in quibuslibet datis punctis habent, comparare poteris; & facile intelliges, areas, quas planetæ æquali tempore describunt, para-

ra-

rametrorum radicibus proportionales esse; & tempora periodica proportionalia esse totis areis, si hæ quidem radicibus parametrorum dividantur. Quæ theoremata & observatione probantur, & sunt ex ipsa virium centralium theoria usque adeo manifesta, ut sit inutilis observatio. Hæc adhuc dixi de planetis primariis.

Eadem facile ad secundarios transferentur. Quippe quia observationibus constat, secundarios omnes circa primarios suos non secus volvi, quam primarios circa solem. Itaque quemadmodum sol ad se trahere primarios dicitur, proclive est credere, primarios etiam satellites suos ad se trahere. Est ergo communis quædam satellitum gravitatio in primarios; & ea quidem, quantum scire possumus, ejusdem plane generis, cujus est primariorum gravitatio in solem.

Quo loco dignum est animadvertere, vim centripetam, quæ Lunam versus terram urget, terrestrium corporum gravitati esse plane similem. Etenim si, observando, spatium notetur, quod luna, in illa tanta a terra distantia, vi centripeta, uno minuto temporis conficit; tum ex eo colligatur, quantum spatii eodem tempore confectura sit, si hic inter terrestria versetur; eam facile apparebit, idem spatium confecturam esse, quod hæc terrestria pari tempore cadendo conficiunt.

Videtur ergo luna eodem gravitationis genere in terram gravitare, quo terrestria quæque gravitant; ut sit jam & terrestribus corporibus, & lunæ, & satel-

tellitibus aliis, & planetis omnibus gravitatio quædam, attractioque communis. Hinc illa in philosophorum scholas pervasit opinio, ut credantur omnia se mutuo trahere; qua opinione qui utuntur ad quidlibet, nihilque non attractione explicant, quoniam genus persæpe mutant, & alias leges comminiscunscuntur, atque alias, vimque ipsam in repulsivam arbitratu suo vertunt, videant ne attractionis minuant dignitatem. Simplicitatem certe, qua maxime commendabatur; illi adimunt. Sed ad cælestia redeamus, in quibus attractio est illustrior.

Trahentibus se mutuo planetis omnibus (oportet enim sic esse, si omnia quidem se mutuo trahunt) nemo sane mirabitur, quod turbentur illi interdum, & ab eo cursu, quem solis attractio postulat, aberrent non nihil; non quod soli non obtemperent, quemadmodum supra posuimus; sed quia planetis etiam aliis, præsertim si propius accesserint, est illis obtemperandum. Et sane turbationes, aberrationesque in planetis varias astronomi diligentissimi compertas habent; consentientesque cum attractione mutua invenerunt, eas quidem, in quibus calculos experiri voluerunt; est enim in multis implexa adeo supputatio, & longa, ut ferri vix possit. Perexiguæ autem sunt turbationes illæ, quas dixi, aberrationesque, ut observatorem, nisi diligentiam adhibeat, facile fugiant. Cujus rei caussa esse potest, quod planetarum massæ exiguæ admodum sint, si cum solis massa comparentur, sitque idcirco pla-

ne-

netæ cujufvis attractio, si eum folis attractione conferatur, prope contemnenda. Hæc fufius non perfequor; nam neque meum id effe arbitror, nec loci, hujus.

Ceterum quæ fit maffarum proportio, in fole præfertim, in terra, in jove, in faturno, ex iis cognofci poteft, quæ numero 74 demonftravimus. Sunt enim fol, terra, jupiter, faturnus, ut ante diximus, centralia quædam corpora, circa quæ planetæ alii volvuntur five primarii, five fecundarii, ellipfes defcribentes varias, in quarum focis illa fedent. Jam ergo fi & axes ellipfium harum cognoveris, & periodica planetarum tempora, id quod obfervationes docebunt, ex eo, quem dixi, numero 74 proportionem ftatim colliges, quæ inter centralium illorum corporum maffas intercedit. Hinc apparebit, quanto folis maffa planetarum omnium maffas fuperet. Cognitis porro planetarum maffis, (ut ne phyficorum oblectamenta alia prætermittamus) quoniam & magnitudines ex obfervatione cognofcentur; nihil negotii erit denfitates etiam cognofcere. Quibus rebus cognitis facile innotefcet, quantum corpora quæque graviten, fi vel in fole, vel in terra ponantur, vel in jove, vel in faturno. Quæ aftronomi quidem vix curant; phyfici curiofiores confectantur.

Illud magis ad aftronomos pertinet, quod cum planetæ exigua admodum maffa fint, uti diximus; folem, etfi ipfum quoque ad fe trahunt, finunt tamen manere quafi immobilem. Fac enim, folem & pla-

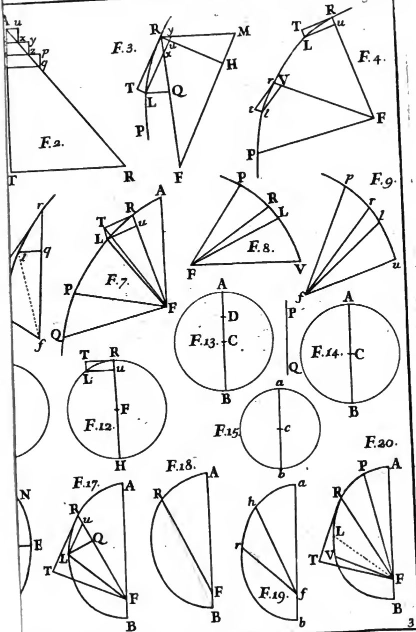
planetam quemvis, trahentes se mutuo, jam inde ab initio rerum similiter fuisse projectos, uti duo illa corpora, de quibus supra in quinto capite disserui-mus. Oportebit sane solem circa commune gravitatis centrum ellipsim quamdam describere, quæ illi respondeat, quam planeta describit, eique sit plane similis. Id colliges in illo, quod dixi, capite ex numero III. & sequentibus. Quod si planetæ massa ad massam solis sit longe minima, consequens erit, ut commune gravitatis centrum centro solis quamproximum sit; describetque sol ellipsim usque adeo parvam, vix ut moveri videatur. Ac motus quidem solis non uni tantum planetæ respondere debet, sed multis; & modo huc verti, modo illuc pro varia planetarum, vi distantia, ac situ; verum cum tenuissimæ planetarum omnium massæ sint, sol utique deturbari se ab nullo patietur; trepidationes tantum quasdam accipiet, oscillationesque quam minimas.

Res ipsa monere videtur, ut de cometis quoque dicamus, qui longissime advenientes persæpe intra planetarum orbitas se immittunt, ac planetæ haberi volunt, Nevtono probante. Et sane si illa tenent, quæ de communi corporum omnium attractione modo diximus, oportet, cometas quoque a sole trahi. Ac si illa repetamus, quæ in Appendice Cap. IV. monuimus, manifestum erit, debere eos, ut qui transversim projecti sunt, sectiones quasdam conicas suo cursu describere, in quarum foco sol sedeat, ut planetas pulcherrime imitari videantur. Itaque, ut pla-

ne-

netarum, ſic etiam cometarum viæ definiri jam poterunt, & conſtitui tempora, & reverſiones præcognoſci, in quibus magna cum ſpe recentiorum aſtronomorum exercetur labor; & vero obſervationes, quas quidem ad calculos revocaverunt, egregie adhuc reſpondere viſæ ſunt, ut appareat in omnibus Nevtoni felicitas.

Hæc dixi, ut intelligas, quantas phyſicis commoditates jam illa afferant, quæ de viribus centralibus dicta a nobis ſunt; etſi illa cum diceremus, ad nullum certum corpus reſpicientes in genere ipſo conſiſteremus. Quæ ſi animo, mi Torquate, infixeris penitus, feceriſque ut ſint tibi in quæſtione qualibet paratiſſima, putare debebis, te etiam in phyſicis non parum profeciſſe.


F.2.
F.3.
F.4.
F.7.
F.8.
F.9.
F.12.
F.13.
F.14.
F.15.
F.17.
F.18.
F.19.
F.20.

MEMOIRE

Sur les Figures, & les Solides Circonscrits au Cercle, & à la Sphère.

On sait qu' Archimède, le père des Mathématiciens, trouva dans l' examen qu' il fit des propriétés de la Sphère & de celles du Cylindre qui lui est circonscrit, que les solidités de ces deux corps sont entr' elles commes leurs surfaces; il voulut que cette découverte servit d' ornement à son tombeau, ce qui fit honneur à la decouverte même. Environ deux mille ans après, le Père Tacquet, fameux Géomètre, aperçut une semblable propriété dans le cône équilatéral, & eut le plaisir d' exprimer par des nombres le rapport de ce cône à la Sphère, comme Archimède l' avoit fait pour la Sphère & le Cylindre. Le Père Tacquet n' eut pas la même bonheur lorsqu' il s' avisa de circonscrire à la Sphère un autre Solide qu' il appella *Rhombe quarré*; car quoique ce Rhombe quarré & la Sphère soient entr' eux comme leurs surfaces, cette proportion ne sauroit être exprimée en termes rationeles, ce qui eut été à souhaiter pour la beauté du théorème.

L' exemple de Tacquet m' a donnè envie d' étendre encore plus loin le théorème d' Archimède, & même de le tranſporter, pour ainſi dire, au Cercle; car y' ai pensè que ſi l' on pouvoit circonſcrire à un cercle, un Polygone, qui fût au cercle même comme ſon périmètre à la circonférence, on pourroit admirer cette proportion preſqu' autant que celle qui a été trouvée par Archimède, & par Tacquet. Cette recherche m' a conduit à deux propoſitions, dont l' univerſalité ne permet gueres d' en chercher d' autres: je les expoſerai avec des remarques qui ſerviront à en faire ſentir toute l' étendue.

PREMIERE PROPOSITION.

Tout polygone circonſcrit au Cercle eſt au Cercle même, comme ſon Périmètre à la Circonference du Cercle.

DEMONSTRATION.

Soit T (*Fig.* 1.) le centre d' un Cercle, dont le rayon $TR = r$. Suppoſons la circonférence $= C$, le cercle lui-même ſera $= \frac{Cr}{2}$. Qu' on circonſcrive au même cercle un poligone, dont' les côtes ſoient des lignes droites A B, C D, E F &c. d' une longueur priſe à volonté, & en nombre quelconque: il eſt clair, que ſi du centre T l' on tire deux lignes

TA,

TA, TB aux extrémités de chaque côté AB, on aura réfolu tout le polygone en autant de triangles, qu' il y aura de côtés. On voit en même temps que tous ces triangles auront leurs fommets au centre T, & une même hauteur $= TR = r$, & que leurs bafes feront les côtes mêmes AB, CD, EF &c. d' où il fuit que la fomme des triangles, c' eft-a-dire, le polygone luimême $r \times \frac{AB + CD + EF}{2}$, &c. or le périmètre $= (AB + CD + EF)$ &c. & on a d' ailleurs cette proportion $r \times C \frac{AB + CD + EF}{2}$ &c. $\frac{Cr}{2}$ :: AB + CD + EF, &c. C.

Donc le polygono circonfcrit, eft aut cercle comme fon périmètre à la circonférence du Cercle C. Q. F. D.

I. Remarque. Il eft indifférent que le polygone foit régulier ou irrégulier, la démonftation s' applique également à tous les polygones circonfcrits.

II. Remarque. On voit d' abord qu' outres les polygones circonfcrits, il eft trèsfacile d' en decrire autour du cercle une infinité d' autres, qui auront la même propriété: Par exemple; fi l' on décrit autour du Cercle XR, [*Fig.*2.] un polygone ABCDEFGHIK, de manière que le côté AB étant parti d' une tangente AX, le côté CB d' une tangente CR. & ainfi de fuite, le polygone décrit puiffe fe réfoudre en autant de triangles qu' il y a de côtés, ainfi que nous l' avons déjà dit des

po-

polygones circonſcrits ; ce polygone ſera auſſi au cercle comme ſon périmètre à la circonférence. On le prouvera en y appliquant la même démonſtration.

Il ſuit de-là, que ſi l' on circonſcrit au cercle X R (*Fig.* 3.) pluſieurs polygones A E L, C G L, les côtés de l' un & de l'autre s' entrecoupant en B, D, F, H &c. & que l' on prenne ſeulement les parties exterieures des côtés, ſavoir, A B, B C, C D, D E &c. de ſorte qu' on en compoſe un polygone tel que A B C D E &c.; ce polygone ſera toujours au cercle comme ſon périmètre à la circonference du cercle.

III. Remarque. Il eſt évident par la propoſition générale qu' on vient de démontrer, que les polygones circonſcrits au même cercle ſont entr' eux comme leurs périmètres.

SECONDE PROPOSITION.

Tout ſolide terminé de toutes parts par des plans, & circonſcrit à une Sphère, eſt à la Sphère même, comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

DEMOMSTRATION.

Soit T (*Fig.* 4.) le centre d' une Sphere, dont le rayon $TR = r$. Suppoſons la circonférence du plus grand Cercle $= c$: la Sphère ſera $= \frac{2crr}{3}$, & ſa

sa surface $= 2cr$. Soit circonscrit à la même Sphère un Solide terminé par des plans A B, C D, E F &c. de telle grandeur, figure, & en tel nombre que l' on voudra: Il est clair que si par tous les côtés de chaque plan A B, on mène d' autres plans qui passent par le centre T, on aura résolu tout le solide. On voit aussi que toutes ces pyramides auront leurs sommets aut centre T, & une même hauteur $= TR = r$, & que leurs bases seront les plans mêmes A B, C D, E F &c. d' ou il suit que la somme de toutes les pyramides, c' est à-dire, le solide lui-même sera $r \times (\frac{AB + CD + EF}{3}$, &c. mais la surface du solide, $= AB + CD + EF$ &c. & oh d' ailleurs cette proportion $r \times (\frac{AB + CD + EF}{3})$, &c.: $\frac{2crr}{3} :: AB + CD + EF$, &c. $2cr$. Donc le solide circonscrit à la Sphère, est à la Sphère comme sa surface à la surface de la Sphère. C. Q. F. D.

I. Remarque. Il n' importe nullement que le solide circonscrit soit régulier ou non, la demonstration s' appliquant à tous les polygones circonscrits sans exception,

II Remarque. On voit d' abord qu' outres les polygones circonscrits, on en pourra décrire autour de la Sphère une infinité d' autres, qui auront la même propriètè, pourvu que chaqune des surfaces dont ils sont terminés étant partie d' un plan qui touche le sphère, le solide puisse se resoudre en autant

tant

tant de pyramides qu' il y a de ces ſurfaces ; car ces ſolides feront auſſi à la Sphère en raiſon de leurs ſurfaces, ce qu' on prouvera en y appliquant la précédente démonſtration.

On voit par là combien il eſt facile de circonſcrire à une Sphère, ou bien de décrire à l'entour, un ſolide qui ſoit à la Sphère même, comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

III. Remarque. Il eſt clair que tous les ſolides circonſcrits à la même Sphère, ſont entr' eux comme leurs ſurfaces.

IV. Remarque. Si l'on prend le Cylindre (ſelon la permiſſion qu' en donne la Géomètrie des infiniment petits) pour un priſme, & le cône pour une pyramide, en ſuppoſant que les ſurfaces courbes de ces ſolides ſoient compoſées d' une infinité de plans, il eſt clair que le cylindre auſſi bien que le cône étant circonſcrits à une Sphère, ils la doivent toucher par tous ces plans, ce qui les ramène à l' eſpèce des ſolides que nous avons conſidérés juſqu' ici; il n' en faut pas davantage pour démontrer que le Cylindre & le cône étant circonſcrits à une Sphère, feront à la Sphère même, comme la ſurface du Cylindre, ou du cône à la ſurface de la Sphère. On voit déja que le théorème d' Archimède, & celui de Tacquet ne ſont que deux cas particuliers de ma propoſition qui eſt ſi générale, que nonſeulement elle les embraſſe tous deux, mais encore qu' elle les étend à l' infini. C' eſt ce que l' on va voir dans les remarques ſuivantes.

Pour

Pour le Cylindre .

V. Remarque. SOit le Cylindre B H (*Fig.* 5.) circonscrit à une Sphère A M T , le cylindre & la Sphère feront entr' eux en raifon des furfaces : c' eft le Théorème du grand Archimède. Ma propofition y arrive, & s' étend encore au-delà : car fi le cylindre B H étant prolongé indéfiniment jufqu' en F , on le coupe par le plan E F , qui touche la Sphère au point M , on aura un morceau de cylindre B E F D B, que j' appellerai *cylindraceum* , & qui par ce qu' on a dit à la remarque précédente , fe réduira à l' efpèce des folides qui font compris dans ma feconde propofition ; donc le *cylindraceum* B E F D B , fera auffi à la fphère , comme fa furface à la furface de la Sphère.

Si on fe plaît a trouver des raifons de nombre à nombre , il fera tre facile de faire une infinitè de *cylindraceum* commenfurables à la Sphère. Voici comment.

Soit C le centre de la Sphère , A T le diamètre, qui eft àuffi axe du cylindre. Ayant pris fur ce diamètre une ligne C P qui foit au rayon de la Sphère en raifon rationelle , & menè P M perpendiculaire a C P, qui coupe la furface de la Sphère au point M , si l' on coupe le cylindre par un plan E F , qui touche la Sphère en M , on aura toujours un *cylindraceum* B E F D B commenfurable à la Sphè-

re: ce qui se peut démontrer par un petit calcul.

VI. Remarque. Ma proposition ne s' arrête pas au *cylindraceum* dont je viens de parler; car si ayant une fois prolongé le cylindre B G [*Fig.* 5.] indéfiniment jusqu' en F, & l'aïant coupè par le plan E F, qui touche la Sphère au point M, on le prolonge encore de l' autre côté indéfinement jusqu' en K, & qu' on le coupe par un autre plan I K, qui touche aussi la Sphère au point V, on aura un autre *cylindraceum* F E I K F, qui sera aussi à la sphère comme sa surface à la surface de la Sphère.

VII. Remarque. Et si l' on coupe, ou le cylindre B H (*Fig* 5.), ou bien l' un des *cylindraceum* B E F D B, ou l' autre F E T K F par d' autres, & d' autres plans à l' infinì, dont chacun touche la Sphère, il en restera toujours autour de la Sphère un morceau de cylindre, terminé par une surface cylindrique coupée en mille façons, & par autant de plans que l' on voudra; & ce morceau sera aussi à la Sphère comme sa surface à la surface de la Sphère. C' est la même proposition & la même démonstration qui regnent par tout.

Pour le Cône.

VIII. Remarque. Soit le Cône B V L (*Fig.*) circonscrit à une Sphère A M T. Tacquet à trouvè très-ingénieusement que si ce cône est équilateral, il sera

ra à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. Ma ſeconde propoſition n' eſt pas ſujette à cette condition, car la démonſtration que j' en ai donée, ſelon la IV. Remarque, s' appliqua d' elle-même à tout cône circonſcrit à la Sphère. Il eſt donc prouvé que tout cône circonſcrit à une Sphère a la même proprieté que l' équilateral, c' eſt-à-dire qu' il eſt à la Sphère, comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère.

Si l' on veut s' arrêter à des cônes qui ſoient à la Sphère en raiſon rationelle, il ne ſera pas non plus néceſſaire d' avoir recours au cône équilatéral, puiſque l' on en peut faire une infinité d' autres, qui feront auſſi commenſurables à la Sphère voicì comment. Soit C le centre de la Sphere, A T le diamètre, qui ſera auſſi axe du cône. Que l' on prenne ſur ce Diamètre la ligne C P commenſurable au rayon de la Sphère; & qu' on mène P M perpendiculaire a C P, qui coupe la ſurface de la Sphère au point M; ſi l' on circonſcrit à la Sphère un cône B V L, dont le côté V B la touche au point M, le cône & la ſphère ſeront toujours en raiſon rationelle. On le prouvera par un calcul trèsaisé.

IX. Remarque. Revenons à notre propoſition: Si le cône B V L (*Fig. 6.*) que l' on a ſupposè juſqu' ici avoir la baſe circulaire, eſt prolongé indéfiniment juſq' en K, & traversé par un plan G K, qui touche la Sphère au point N, en ſorte que l' on forme un autre cône V G K, dont la baſe ſera une

ellipſe, ce cône VCK ſera auſſi à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère; car ce n' eſt qu' un autre cas de ma propoſition.

X. *Remarque*. Les mêmes choſes ſuppoſées, ſi du côté du ſommet V (*Fig. 6.*) on coupe le cône par un plan EF, qui touche la Sphère au point I, le morceau BEFLB, qui reſtera du cône BVL, auſſi bien que le morceau GEFKG, qui reſtera du cône GVK, ſera à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. Et ſi l' on coupe de même le cône BVL, & le cône GVK par d' autres, & d' autres plans à l' infini, dont chacun touche la Sphère, il en reſtera toujours un morceau de cône terminé par une ſurface conique coupée en mille ſens, & par autant de plans que l' on voudra, qui ſera auſſi à la Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère. La raiſon en eſt toujours la même.

Pour d' autres Solides.

XI. *Remarque*. IL y a d' autres ſolides, qui ne ſont ni cylindres, ni cônes, mais qui ſe compoſent de l' un & de l' autre de ces deux corps. Ma propoſition les embraſſe auſſi bien que les cylindres, & les cônes ſimples: j'en donnerai quelques exemples. Soit un demi-cercle ANT (*Fig. 7.*), dont le centre ſoit C, & le diamètre AT. Soit pris ſur ce diamètre un point quelconque Q; ayant tiré QR per-

perpendiculaire à C Q, & égale au rayon du cercle, on menera du point R une tangente R B, qui rencontrera la ligne A B perpendiculaire au diamètre en B, & une autre tangente R V, qui rencontrera le même diamètre prolongé en V. Cela fait, si l'on fait tourner autour de la ligne A V le demi-cercle A N T avec le trapèze A B R V, on formera par la révolution du demi-cercle une Sphère, & par la révolution du trapèze un solide circonscrit à la Sphère, qui sera composé d'un cylindre formè par la révolution du rectangle B Q, e d'un cône formé par la révolution du triangle V R Q. Il est clair que ce solide entre dans l'universalité de ma proposition, & par conséquent qu'il est à la Sphère comme sa surface à la surface de la Sphère.

Si on a soin de prendre le point Q de manière que la raison de C Q au rayon du demi-cercle soit rationelle, la raison du solide à la Sphère le sera aussi.

XII. Remarque. Soit un demi-cercle A N T (*Fig.* 8.) dont le centre soit C, & le diamètre A T. Ayant pris sur ce diamètre deux points quelconques Q & S, l'un en deçà, & l'autre en delà du centre, que l'on mène deux lignes Q R, S L perpendiculaires au diamètre, & dont chacune doit être ègale au rayon du cercle. Cela fait, qu'on mène R L, qui touchera le demi-cercle au point N, & les deux tangentes R V, L H, qui rencontrent le diamètre A T prolongé en V & H. Si l'on fait tour-

ner

ner autour de la ligne V H le diamètre A N T avec le trapèze V R L H, il se formera par la révolution du demi-cercle une sphère, & par la révolution du trapèze un solide circonscrit à cette Sphère, qui sera composé d' un cylindre formé par le révolution du rectangle L Q, & de deux cônes formés par la révolution des deux triangles V R Q, A L S. En suivant toujours le même raisonnement, on trouvera sans peine, que ce solide est aussi à la Sphére, comme sa surface à la surface de la sphère.

Si les points Q & S sont pris de manière que les ligne C Q, C S soient l'une & l' autre commensurables au rayon du demi-cercle, la raison du solide à la Sphère sera aussi rationelle.

XIII. Remarque. Soit un demi-cercle A N T (*Fig.* 9) dont le centre soit C, & le diamètre A T. Ayant pris sur ce diamètre un point quelconque Q, & mené la ligne Q R perpendiculaire au diamètre, & plus longue que le rayon, soient tirées deux tangentes R V, R H, qui rencontrent le diamètre A T prolongé en V, & H. Si l' on fait tourner autour de la ligne V H le demi-cercle A N T avec le triangle V R H, on aura par la révolution du demi-cercle une Sphère, & par la révolution du triangle un solide circonscrit à la Sphère, qui sera composé de deux cônes formes par le révolution des deux triangles Q C V, Q R H, Y' appellerai ce fode *biconicum*.

Il est certain qu' en variant les longueurs C Q, & Q R,

& Q R , on peut circonfcrire à une même Sphère une infinité de *biconica*. Le fameux Tacquet en a confidéré un qui fe forme en prenant C Q égale à zéro , c' eft à-dire , retirant le point Q jufqu' au centre C , & de plus prenant Q R de tellé longueur, qu' elle oblige l' angle V R H d' être droit. A ces conditions il nous affure que le *biconicum* qu' il appelle *rhombe quarré*, fera à la Sphère comme fa furface à la furface de la fphère.

Ma propofition peut fe paffer de toutes ces conditions, car elle embraffe tout *biconicum* fans exception. Ce n' eft donc pas feulement le *biconicum* de Tacquet qui a la proprieté d' être à la Sphère à la quelle il eft circonfcrit, comme fa furface à la furface de la même fphère c' eft une propriété qui convient à tous les *biconicum*. J' en reviens toujours à ma propofition, car elle eft univerfelle, & très-courte. Ceux qui auront envie de calculer, pourront démontrer ce même théoreme, auffi-bien que beaucoup d' autres, par des fupputations particuliéres aux quelles ma propofition n' aura point de part.

Tacquet a trouvé que fon *biconicum* étant circonfcrit à une Sphère, il eft à la même fphère en raifon de la diagonale du quarre au côté : proportion commode mais qui feroit plus agréable, fi elle étoit rationelle. Cependant, fi l' on veut un *biconicum* commenfurable à la fphère, il fuffira que les deux lignes C Q & Q R , foit l' une & l' autre commenfurables au rayon du demi cercle , & de plus

que

que la différence de la somme des deux quarrés de CQ & de QR au quarré du rayon soit elle même un nombre quarré ; ce qui se fera par un calcul très-facile.

XIV. Remarque. Je ferais ici une remarque d' une si grande étendue, que plusieurs de celles que nous avons déjà faites y reviendront, mêmes les théorèmes d' Archimède & de Tacquet. Soit circonscrit à un cercle dont le centre est T (*Fig.* 10.) un polygone quelconque A B C D E F E, ou bien qu' on décrive à l' entour (*Fig.* 11.) A B G D E F G H I K tel qu' on l' a proposé à la seconde remarque de ma première proposition. Si par le centre T on conduit une ligne droite X Z quelconque, qui traversant le centre & le polygone, les divise en deux, & que l' on fasse tourner autour de X Z le demi-cercle avec l' une e l' autrou partie, telle qu'on voudra, du polygone divisé ; on formera toujours par la révolution du demi-cercle une sphère, par la révolution de la partie tournoyante du polygone, un solide qui sera à la sphère comme sa surface à la surface de la sphère. Il est clair que c' est toujours le même raisonnement qui nous suit par-tout.

Je ne m' étendrai pas davantage sur une matière où il y a tant de cas, qu' il est difficile de les ranger par ordre, sans qu' il en échappe une infinité: ce sont d' ailleurs des bagatelles en Géométrie, & la Societé Royale à qui j' ose les présenter, à quelche chose de mieux à faire. Si cependant elle veut

veut bien se souvenir que j' ai l' honneur d' être un de ses membres, en quoi consiste toute ma gloire, j' espere qu' elle pardonnera mon audace, & qu' elle aura la bontè de corriger mas fautes ; ainsi qu' elle en a le droit.

Addition sur les figures inscrites dans le Cercle, & sur les solides inscrits dans la Sphère.

VOici encore deux théorèmes qui me paroissent utiles, aux quels personne, que je sache, n' avoit jusqu' ici fait attention : ils ont pour objet les figures inscrites dans le cercle, & les solides inscrits dans la Sphère. Quoiqu' ils n' aient pas peut-être toute l' universalité qu' on pourroit souhaiter, il sont cependant d' une assez grande étendue : la démonstration en est fort simple, ce qui n' en doit pas diminuer le prix.

THEOREME I.

Un Polygone inscrit dans un cercle ne peut jamais être à ce même cercle comme son périmètre à la circonférence, si ce polygone est tel qu' on y puisse inscrire un autre cercle.

DEMONSTRATION.

IL est évident par ce qui a été démontré ci-dessus, que le cercle que l' on suppose pouvoir être inscrits dans le polygone, sera à ce même polygone comme sa circonférence au périmètre du polygone. Donc si le polygone étoit au cercle dans le quel il est inscrit comme son périmètre à la circonference de ce cercle, il s' ensuivroit que le premier cercle seroit au second comme la circonférence à la circonférence; ce qui est impossible.

COROLLAIRE.

J'Ai prouvè en peu de mots qu' aucun polygone regulier, ni aucun triangle, même irregulier, étant inscrit dans un cercle, ne sauroit être à ce même cercle comme son périmètre à la circonférence; car on peut toujours inscrire un autre cercle dans un polygone régulier quel qu' il soit, ainsi que dans un triangle quelconque.

THEO-

THEOREME II.

Un corps inſcrit dans une Sphère ne peut jamais être à cette Sphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère, ſi ce corps eſt tel qu' on y puiſſe inſcrire une autre Sphère.

DEMONSTRATION.

IL eſt clair par ce qu' on a dèmontré ci-deſſus, que la Sphère que l' on ſuppoſe ici pouvoir être inſcrite dans le ſolide, ſera à ce ſolide comme ſa ſurface à la ſurface du ſolide. Donc ſi le ſolide étoit à la ſphère dans laquelle il eſt inſcrit comme ſa ſurface à la ſurface de cette ſphère, il s' enſuivroit que les deux ſphères ſeroient entr' elles comme leurs ſurfaces; ce qui eſt impoſſible.

CORROLLAIRE I.

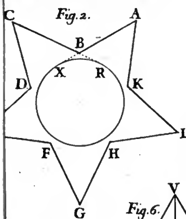
AUcun corps régulier inſcrit dans une Sphère, ne peut jamais être a cette ſphère comme ſa ſurface à la ſurface de la Sphère; car la ſphère peut être inſcrite dans chacun des cinq corps reguliers.

COROLLAIRE II.

IL en eſt de même du cylindre équilatéral & du cône droit par la même raiſon.

Je ne m' étendrai point fur les autres ouvertures que peuvent nous donner ces deux propofitions : on voit qu' elles font fort étendue ; & qu' on en peut tirer beaucoup d' autres corollaires avec une extrême facilité.

OPU-


Fig. 2.
C
A
B
X
R
D
K
I
F
H
G

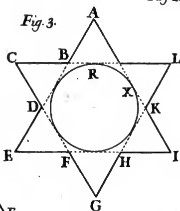
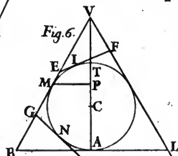
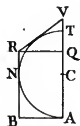
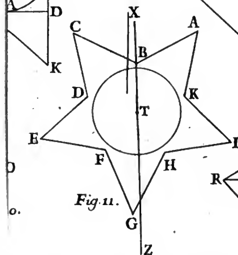
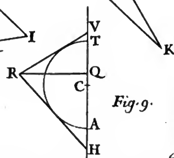

Fig. 3.
A
C
B
L
R
X
D
K
E
F
H
I
G


Fig. 5.
F
H
T
P
C
A
D
K


V
Fig. 6.
F
E
L
T
M
P
C
G
N
A
B
L


V
T
R
Q
N
C
B
A
Fig. 7.


X
C
A
B
D
K
T
E
I
F
H
Fig. 11.
G
Z


V
T
R
Q
C
Fig. 9.
A
H
K

OPUSCULUM

De separandis indeterminatis.

QUanti momenti sit, quanti operis, quantumque ad æquationum differentialium integrationes, quibus subtilissimæ totius algebræ quæstiones continentur, indeterminatarum separatio valeat, nemo est, ut arbitror, qui ignoret. Itaque mirandum, semper esse existimavi, vel potius dolendum, quod cum alios nobilissimæ illius scientiæ locos scriptores tam multi certissimis præceptis, exquisitissimaque doctrina illustraverint, hunc unum quasi desertum, & omni prope arte vacuum, abiectumque reliquerint. Etenim, si præclaram illam excipimus regulam, quam multos jam ab hinc annos vir gravissimus, & de universa algebra optime meritus, Gabriel Manfredius, Præceptor meus, Venetiis edidit, in tomo XVIII. diarii literatorum, anno MDCCXIV; quæque in iis æquationibus valet, in quibus productum, quod variabilibus fit in quovis propositæ æquationis termino, easdem dimensiones habet; vix unam, aut alteram habemus præceptionem, quæ separandarum indeterminatarum viam aliquam monstret. Cum ergo superioribus his mensibus, longo sane intervallo, ad algebram me revocassem (pudebat enim ab illo studio jamdudum me abesse, quod academia ab eo maxime, qui a secretis sit, qui-

que

que acta describere debeat, suo quasi jure postulet) hæsi præsertim in eo, quem dixi, loco, non ut novi aliquid invenirem, (quis enim ego sum, ut tam brevi præsertim studio aspirare possim ad hanc gloriam?) sed ut viderer fecisse aliquid, vel certe voluisse.

In hoc ergo studio cum separandarum indeterminatarum rationem aliquam pervestigarem, omnemque aditum quærerem, theorema nescio quod mihi occurrit, ut primum visum est, non inelegans, quodque spem aliquam ostendere videbatur. Id ego quidem regulam appellare non ausim, quamquam ipsum regulam, credo, se esse putat; nec sibi satis placere posse videtur, nisi pro regula habeatur. Sed de hoc dicam postea. Nunc theorema ipsum, utcumque est, aperio. Quod ut brevius faciam, atque ea, quæ volo, commodius explicem, duo ante moneo.

Primum. Proposita æquatione quavis, putabo in unoquoque ejus termino utramque variabilem y, & x reperiri; nam si cui termino aberit vel y, vel x, putabo adesse y^0, vel x^0.

Deinde numerum exponentem, quem in unoquoque æquationis termino habebit variabilium alterutra, vocabo e; summamque exponentium amborum, quos in eodem termino habebunt variabiles ambæ, vocabo f. Quo satis intelligitis, numeros e, & f in eadem æquatione non eosdem ubique fore, sed alios in terminis aliis.

Jam vero theorema ipsum expono. Proposita æquatione differentiali, extet numerus quipiam r ejus.

ejusmodi, ut, si sit e exponens litteræ y, fiatque in quovis termino habente dx numerus $re+f$, in quovis alio numerus $re+r+f$; sint numeri hi duo perpetuo æquales; vel etiam exstet numerus alius quipiam r ejusmodi, ut, si sit e exponens litteræ x, fiatque in quovis termino habente dy numerus $re+f$, in alio quovis numerus $re+r+f$, sint item numeri hi duo perpetuo æquales; affirmo jam indeterminatarum separationem expeditissimam fore, si numerorum r alterutrum adhibueris ad hunc modum.

Sume tibi variabilem quampiam z arbitratu tuo. Tum pone vel $y=zx^{r+1}$, adhibens primum e duobus, quos dixi, numeris r; vel $x=zy^{r+1}$, adhibens alterum. Substitutionibus enim rite factis sic æquatio tota vertetur, ut iam separare indeterminatas quivis possit vel indoctus. Est ergo in duobus numeris r, si modo inveniantur, spes omnis: quorum alter satisfaciet litteram y expellendo, alter expellendo litteram x; itaque illum per y, hunc per x utilem appellabo.

Atque hæc profecto theoremati satis esse poterant, si illud quidem theorematis nomine contentum esset; sed est paullo ambitiosius, nec satis habet docuisse aliquid; vult etiam præcipere, & regularum more, ut ita dicam, imperare. Quod tamen frustra faciet, nisi numeri, quem dixi, r inveniendi ratio patefiat. Si enim numerum hunc invenire nescias, monuisse aliquid theorema videbitur, nihil ad praxin contulisse. Hujus ego numeri inveniendi viam paucis

cis aperio. Vos animum diligenter attendite.

Propofita æquatione terminos ejus duos felige; quorum alter habeat dx, alter dy; nam bini tales numquam aberunt. Atque in termino habente dx puta exponentem litteræ y effe m, litteræ x effe p; in termino habente dy exponentem litteræ y effe n, litteræ x effe q. Tum numeros duos tibi finge, primum ex hac formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$, alterum ex hac $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$. Duobus his numeris comparatis utrumque experire, fi tibi forte in æquatione propofita pro numero r effe poffit; ideft an, adhibitus in locum r, numeros $re+f$, $re+r+f$ æquales, quemadmodum fupra dixi, ubique efficiat; primus quidem pofito e exponente litteræ y, alter pofito e exponente litteræ x. Si experimentum refponderit, inventus jam tibi erit numerus r, quem quærebas, five per y utilis, five per x; fin minus, inveniendi fpes erit nulla. Sic quæftionem mathematicorum more folutam habebis, re vel confecta, vel defperata.

Hæc cum ego, Sodales optimi, animadvertiffem, & quo modo numerus r inveniri poffet, comperiffem, tum demum, re ipfa adductus, non dubitavi theorema illud meum in præceptis ponere, & novam regulam, vixque fibi fatis fidentem, inter antiquas illas graviffimas, quæ jamdiu in algebra regnant, quafi adolefcentulam introducere; eamque, quo effet audacior, adnotationibus illuftravi quibufdam, ne quid ei deeffet, vel ad ufum, vel ad ornatum. Has ftatim expono.

Pri-

Frimum. Numerus, quem e formulis duces, cujuſcumque ſit generis, utilis eſſe poterit; ſive ergo poſitivus fuerit, ſive negativus, ſive integer, ſive fractus, ſive rationalis, ſive irrationalis genus non te moretur. Regula enim noſtra numeros omnes complectitur; nullum reſpuit. Quamquam irrationalis numquam erit, niſi ſi æquatio propoſita exponentem quempiam irrationalem ipſa habeat.

Secundo. Quoniam e duabus formulis, quas ſupra poſui, numeri duo duci poſſunt, ſcire convenit vel utrumque utilem futurum eſſe, vel neutrum. Quod ſi ambo utiles ſint; tu autem unum inveneris; quamvis ad ſeparandas indeterminatas hic unus ſatis ſit; me auctore tamen quæres etiam alterum, etenim cum ſint plerumque inæquales, verendum eſt, ne, ſi alterum negligis, negligas commodiorem.

Fieri autem poteſt, ut numerus, quem e formulis noſtris duces, zero multis modis implicetur; quod ſi accidat, videbitur regula, quam tradidimus, obſcurior fieri. Eſt ergo in his caſibus per adnotationes, quas ſtatim proponam, illuſtranda.

Quamquam ſi numerus, ductus e formulis, ipſe zerum fuerit, nihil turbabit; etenim (ſi modo utilis ſive per x, ſive per y inveniatur) in locum r adhiberi poterit, eoque adhibito procedent perbelle omnia.

Hic loci præterire non debeo rem notatu digniſſimam: præclare ſcilicet, ſi numerus ipſe r zerum fuerit, inter meam hanc regulam, eamque, quam o-

 lim

lim Manfredius tradidit, convenire. Enimvero numerus r numquam mihi in zerum abit, nisi si æquatio proposita ea sit, in qua dimensiones productorum, quæ variabilibus fiunt, in terminis omnibus sint æquales. Quibus æquationibus Manfredius per suam illam regulam consuluit, eamque substitutionem proposuit, ad quam regula quoque nostra nos trahit, ut videantur regulæ ambæ hoc loco conjungi, amplexarique se mutuo, auctores suos imitatæ.

Porro interdum fiet, ut numerus, qui e formulis ductus fuerit, prodeat sub specie $\frac{0}{0}$, in quo sane obscuritas erit summa. Quis enim est numerus, qui non sub illa latebra abscondi possit? Verum obscuritas tolletur omnis, si duorum terminorum, qui primum ex æquatione proposita selecti fuerant, abjecto altero, alius, ex eadem æquatione depromtus, in ejus locum substituatur, & numerus r quæratur iterum. Si qui enim numerus erit utilis, sub illa zeri obscuritate in utroque terminorum pari recondi non poterit.

Atqui numerus, qui e formulis ductus fuerit, sic zero interdum implicabitur, ut infinitum se esse ostendat; puta, si prodierit $\frac{1}{0}$. Si quando id accidat, hæc tene: Cum e duabus, quas posui, formulis numeri duo duci possint, si horum alter fuerit $\frac{1}{0}$, numquam non erit alter -1; & vicissim. Cum ergo ad separandas indeterminatas utervis numerus adhiberi possit, facile declinabis infinitatem illam $\frac{1}{0}$, si numerum alterum -1 adhibueris.

Est porro aliquid in hoc ipso numero — 1 diligenter animadvertendum, quod expono breviter. Quamvis numerus — 1 e formulis ductus fuerit, isque se utilem præbeat vel per y, vel per x, ubi tamen ad separandas indeterminatas veneris, substitutio frustra erit. Quæ res te monebit æquationem propositam ejus formæ esse, ut quivis vel indoctus separare indeterminatas jam inde ab initio potuerit labore nullo. Quod facile senties, si ad æquationem ipsam redieris, eamque inspexeris diligentius. Quo videtur numerus ille — 1 prodiisse, ut mathematici, non industriam juvaret, sed imprudentiam reprehenderet.

Neque vero improbandam regulam esse arbitror quod uno in casu auxilium mathematico ferre neget; etenim nec mathematicus illo in casu, si paullo attentior sit, auxilio opus habet, & ipsa in casibus aliis omnibus, qualiscumque numerus r prodeat, præsto est; quo magis illi ignoscendum, si in uno sit renuens. Quid quod separationem indeterminatarum facillime expedit, & brevissime? Quid quod eamdem expedit, nulla nec numerorum, nec constantium, si quibus numeris, aut constantibus propositæ æquationis termini multiplicentur, ratione habita?

At vereor, ne qui vestrum regulæ, quam adhuc tradidi, illud vitio det, quod in æquationibus, in quibus ipsa valere se profitetur, conditionem requirat vix umquam exspectandam. Si enim æquationum millia proponantur, quota quæque erit, in qua nu-

meri illi $re+f$, $re+r+f$ ubique æquales sint? Quod cum sperari vix possit, videtur sane regula non nisi in paucissimis valere posse. Hanc ego rationem, antequam finem dicendi facio, minuendam mihi esse arbitror; eoque magis, quod cum eadem mihi quoque in mentem venisset, initio quidem ita commovit, ut inventam regulam prope abjecerim, nec satis memoria dignam existimaverim. Postea vero cum rem totam attentius considerassem, mecum ipse cogitans, quid id superbiæ est, dixi, ut cum in difficillimo loco verser, eoque, qui regulis prope omnibus careat, hanc, quæ se obtulit, contemnam, propterea quod juvet in paucis; quasi non multo sit melius juvari aliquando, quam numquam? Quamquam cum regula hæc, quam pono, Manfredianæ illi clarissimæ, quæ utique in æquationibus satis multis valet, conjungatur, eamque contineat; cur non ex illa tam gloriosa conjunctione laudem aliquam sibi vindicet? Quod si valet in omnibus iis casibus, in quibus Manfrediana valet, quæ ejus est culpa, si valeat etiam in paucis aliis? Qui tamen non ita pauci sunt, ut, si colligere quis velit, non illorum multitudine obruatur. Possumus enim, dato quovis numero r, infinitas æquationes condere, in quibus ex ea, quam posui, regula indeterminatarum separatio sit facillima; ut jam numero r infinitis modis variato, infiniti ordines eidem regulæ subjiciantur æquationum infinitarum. Sed mathematicis istis tanta est cum infinitate consuetudo, ac prope familiaritas, ut

non

non magnum aliquid dixisse nos putent, si quid infinitum dixerimus; & plane fieri posse intelligunt, ut quamvis exsistere æquationes infinitæ possint, quibus certa conditio insit, illarum tamen, in quæstionibus tractandis, vix ulla umquam occurrat; quod an hic accidat, non nisi tentando cognosci potest. Ego quidem affirmare vere possum, me in æquationibus quibusdam, in quas casu incidi, experimentum regulæ interdum fecisse; ac licet in paucissimis fecerim, rem tamen successisse in non nullis. Volui etiam experimentum certius capere atque illustrius. Cum succurrisset, præstantissimam feminam, & cum celeberrimis mathematicis comparandam, Mariam Agnesiam in præclaro illo suo institutionum analyticarum opere de separandis indeterminatis copiose differere, facile credidi, noluisse illam committere, ut obscurissimum difficillimumque locum non exemplis illustraret quamplurimis. Neque me conjectura fefellit. Etenim, libro in manus sumto, æquationes inveni permultas, quas mulier doctissima ad separandas, si fieri possit, indeterminatas proponit. Quod illa quidem, æquationes easdem multis modis versans, & modo unum artificium adhibens modo aliud, nihilque intentatum relinquens, ut est incredibili summoque ingenio, sic tandem perficit, ut plane ostendat, industriam sibi plus profuisse, quam præcepta, atque artem. Ego autem ex æquationibus illis, ut se se offerebant, statim exscripsi sexdecim, maxime expeditas; visurus postea, an esset illarum aliqua,

quæ

quæ regulæ, quam in hoc fermone vobis propofui, fubjiceretur. Quid plura? Sexdecim æquationibus ad calculos revocatis res fucceffit in ipfis undecim; atque ita fucceffit, ut neque præparare æquationes, neque terminos huc, atque illuc transferre opus fuerit, neque addere quidquam, neque demere, neque illis contineri finibus, quibus fagax femina æquationes interdum coercet fuas; in quibus, fi regulam a nobis modo propofitam tenuiffet, ingenium illa quidem oftendiffet minus, fed indeterminatas feparaviffet facilius. De his hactenus. Omnium, quæ adhuc differui, exempla paucula defcripta habeo, quæ vobis relinquam, ut fi qui velint, poffint legere.

EXEMPLUM I.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^5 y\,dy + x^9\,dy + y^3\,dx + y\,y\,x^4\,dx = 0.$$

Seligo duos terminos; quorum alter habet dx, alter dy; nempe

$$y^3\,dx. \qquad x^5 y\,dy.$$

Tum quæro, qui numerus prodeat ex prima duarum illarum formularum, quas fupra pofui, ideft $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$; ad hunc modum. Quoniam m denotat exponentem litteræ y, & p exponentem litteræ x in termino habente dx; n vero denotat expo-

ponentem litteræ y in termino habente dy, & q exponentem litteræ x in eodem termino; erit $m = 3$. $p = 0$. $n = 1$. $q = 5$, & prodibit e formula numerus 3. Quæro jam igitur, an numerus 3 utilis sit per y. Et est sane; nam si fiat $r = 3$, & in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e exponens litteræ y, & f summa exponentium litterarum y & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = 12$; & pariter in quovis termino habente dy, invenietur $re + r + f = 12$.

Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = 3$, ponaturque $y = zx^{r+1}$, idest $y = zx^4$. Et sane cum sit $y = zx^4$, erit $yy = zzx^8$, & $y^3 = z^3x^{12}$, & $dy = x^4dz + 4zx^3dx$, factisque substitutionibus æquatio proposita vertetur in hanc $x^{13}zdz + 5zzx^{12}dx + x^{13}dz + 4zx^{12}dx + z^3x^{12}dx = 0$ quam si totam dividas per x^{12}, conjectis in unam partem terminis omnibus habentibus dx, in alteram terminis omnibus habentibus dz, facile colliges $\frac{dx}{x} = \frac{-zdz - dz}{z^3 + 5zz + 4z}$. Sic separatas habebis indeterminatas per numerum 3 ductum ex prima formula.

Atqui separari etiam potuissent per numerum $-\frac{3}{4}$, qui prodit ex formula secunda $\frac{n - m + q - p}{p - q + 1}$. Etenim numerus $-\frac{3}{4}$, ductus ex hac secunda formula, invenitur utilis per x; quippe quia, si fiat $r = -\frac{3}{4}$,

& in

& in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f summa exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re + f = \frac{9}{4}$, & pariter in quovis termino, habente dx, invenietur $re + r + f = \frac{9}{4}$. Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si, sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -\frac{3}{4}$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, idest $x = zy^{\frac{1}{4}}$. Et sane substitutionibus rite factis, æquatio proposita vertetur in hanc $z^9 y^{\frac{9}{4}} dy + \frac{5}{4} z^5 y^{\frac{9}{4}} dy + y^{\frac{13}{4}} dz + \frac{1}{4} z y^{\frac{9}{4}} dy + y^{\frac{13}{4}} z^4 dz = 0$ quam si totam dividas per $y^{\frac{9}{4}}$, conjectis in unam partem terminis omnibus habentibus dy, in alteram terminis omnibus habentibus dz, facile colliges $\frac{dy}{y} = \frac{-z^4 dz - dz}{z^9 + \frac{1}{4} z^5 + \frac{5}{4} z}$.

EXEMPLUM II.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^3 y dy + y dx + x dy = 0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y dx. \qquad x^3 y dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in superiore exemplo, erit $m = 1$. $p = 0$. $n = 1$. $q = 3$; atque ex prima formula

$n - m$

$\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicitur numerus -3. Invenies autem numerum -3 utilem per y; quippe quia ſi fiat $r=-3$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino habente dx invenietur $re+f=-2$; & pariter in quovis termino habente dy invenietur $re+r+f=-2$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-3$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx^{-2}$. Quod facile intelliget, qui experiri voluerit.

Neque minus ſeparari poterunt indeterminatæ per numerum $-\frac{3}{2}$, qui ducitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$. Etenim numerus $-\frac{3}{2}$, ductus ex hac ſecunda formula, erit utilis per x, quippe quia ſi fiat $r=-\frac{3}{2}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino habente dy invenietur $re+f=-\frac{1}{2}$, & pariter in quovis termino habente dx invenietur $re+r+f=-\frac{1}{2}$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-\frac{3}{2}$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, ideſt $x=zy^{-\frac{1}{2}}$. Nec erit longum experiri.

EXEMPLUM III.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^{\frac{1}{2}}\,dx + y^{\frac{4}{3}}\,dx + x^{\frac{3}{4}}\,y\,dy = y^3\,dy.$$

Hanc æquationem ex præclarissimis Agnesiæ Institutionibus depromsi. Ad separandas vero indeterminatas modo meo, duos terminos seligo, quorum alter habet dx, alter dy; nempe

$$x^{\frac{1}{2}}d\,x. \qquad y^3\,dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=0$. $p=\frac{1}{2}$ $n=3$. $q=0$; atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur numerus $-\frac{5}{8}$. Invenies autem numerum $-\frac{5}{8}$ utilem per y; quippe quia, si fiat $r=-\frac{5}{8}$, & in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f summa exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino habente dx invenietur $re+f=\frac{1}{2}$; & pariter in quovis termino habente dy invenietur $re+r+f=\frac{1}{2}$.

Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si, sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-\frac{5}{8}$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx^{\frac{3}{8}}$.

Et sane factis rite substitutionibus æquatio proposita vertitur in hanc $x^{\frac{1}{2}}\,dx + z^{\frac{4}{3}}\,x^{\frac{1}{2}}\,dx + x^{\frac{3}{2}}\,z\,dz + \frac{3}{8}\,z\,z\,x^{\frac{1}{2}}d\,x = x^{\frac{3}{2}}\,z^3\,dz + \frac{3}{8}\,z^4\,x^{\frac{1}{2}}\,dx$ quam si totam di-

dividas per $x^{\frac{3}{2}}$, habebis $dx + z^{\frac{4}{3}} dx + xz\,dz + \frac{3}{8}zz\,dx = xz\,dz + \frac{3}{8}z^4\,dx$ ubi , conjectis in unam partem omnibus terminis habentibus dx, in alteram omnibus terminis habentibus dz, indeterminatas ſeparare nihil negotii erit.

Neque minus ſeparari poterunt indeterminatæ per numerum $\frac{5}{3}$, qui ducitur ex ſecunda formula $\frac{n - m + q - p}{p - q + 1}$, quique erit utilis per x. Etenim ſi fiat $r = \frac{5}{3}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y, jam in quovis termino habente dy invenietur $re + f = 3$, & pariter in quovis termino habente dx invenietur $re + r + f = 3$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{5}{3}$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{\frac{8}{3}}$. Id non proſequar; abſolvuntur enim omnia eodem ſemper modo.

EXEMPLUM IV.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$a\,dy = \frac{fy\,dx}{x} + yy\,dx.$$

Hanc quoque ex Agneſia depromſimus; quamquam eamdem æquationem ſcribere nobis licet etiam ad

 hunc

hunc modum

$$a\,dy - fy\,x^{-1}dx + yy\,dx$$

vel etiam

$$ax\,dy = fy\,dx + yy\,x\,dx$$

Scriptionem hanc commodiſſimam ſequens eligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy; nempe

$$yy\,x\,dx. \qquad ax\,dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 2$. $p = 1$. $n = 0$. $q = 1$.; atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur numerus -2. Erit autem numerus -2 utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r = -2$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino habente dx invenietur $re + f = -1$; & pariter in quovis termino habente dy, invenietur $re + r + f = -1$. Erit ergo indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -2$, ponaturque $y = z\,x^{r+1}$, ideſt $y = z\,x^{-1}$. Et ſane cum ſit $y = z\,x^{-1}$, erit $yy = zz\,x^{-2}$, & $dy = x^{-1}dz - z\,x^{-2}dx$, quibus ſubſtitutionibus factis habebis

$$a\,dz - a\,z\,x^{-1}dx = f\,z\,x^{-1}dx + zz\,x^{-1}dx.$$

Et tandem

x^{-1}

$$x^{-1}dx = \frac{dx}{x} = \frac{a\,dz}{zz + \overline{a + fz}}.$$

Neque minus ſeparabuntur indeterminatæ per numerum -2, qui pariter elicitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique eſt utilis per x; quippe quia, ſi fiat $r=-2$; & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino habente dy invenietur $re+f=-1$, & pariter in quovis termino habente dx invenietur $re+r+f=-1$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-2$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, ideſt $x=zy^{-1}$.

EXEMPLUM V.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^4dy + y^7x^{-3}dx + y^4dy = 0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy,

$$y^7x^{-3}dx. \qquad x^4dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=7$. $p=-3$. $n=0$. $q=4$; atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur numerus 0. Eſt autem nu-

merus o utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r = 0$; & in ſingulis propoſitæ equationis terminis vocetur e exponens litteræ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = 4$; & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re + r + f = 4$. Erit ergo indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = 0$, ponaturque $y = zx^{r+1}$, ideſt $y = zx$.

Si ſequi velis formulam ſecundam $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, elicies pariter numerum o, quem invenies utilem per x; ac facile indeterminatas ſeparabis ponendo $x = zy$. Id quod clariorem explicationem non requirit.

EXEMPLUM VI.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$y^3 dx + xyy dy + x^4 y dy + x^7 dy = 0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y^3 dx. \qquad xyy dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = 3$. $p = 0$. $n = 2$. $q = 1$; atque ex prima formula

$n - m$

$\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur $\frac{0}{0}$; in quo eſt ſumma obſcuritas. Igitur abjicio terminum $xyydy$, & in ejus locum aſſumo $x^7 dy$; ac mihi propono duos terminos

$y^3 dx$. $x^7 dy$.

in quibus cum ſit $m=3$. $p=0$. $n=0$. $q=7$, ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicio numerum 2. Eſt autem numerus 2 utilis per y, quippe quia, ſi fiat $r=2$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=9$; & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re+r+f=9$, Erit ergo indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=2$, ponaturque $y=zx^{r+1}$, ideſt $y=zx^3$. Separationem ipſam non perſequor, nam vel minus peritis facillimam ſe præbebit.

Neque minus ſeparabuntur indeterminatæ per numerum $-\frac{2}{3}$, qui elicitur ex ſecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x; etenim ſi fiat $r=-\frac{2}{3}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f ſumma exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re+f=\frac{7}{3}$, & pariter in quovis termino, habente dx, invenietur $re+r+f=\frac{7}{3}$. Erit ergo indeterminatarum ſeparatio

ex-

peditissima, si, sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=-\frac{2}{3}$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, idest $x=zy^{\frac{1}{3}}$.

EXEMPLUM VII.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione.

$$y^t dy = cx^u dy + eyx^{u-1}dx.$$

Hanc ex Agnesia depromsimus; quamquam ipsa pro t, & u, utitur literis r, & n, quas nos ad alium usum sepofuimus. Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$yx^{u-1}dx. \qquad y^t dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=1$. $p=u-1$. $n=t$. $q=0$; atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur numerus $\frac{u-t}{t}$. Est autem numerus $\frac{u-t}{t}$ utilis per y; quippe quia, si fiat $r=\frac{u-t}{t}$, & in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f summa exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=\frac{ut+u-t}{t}$, & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re+r+f=\frac{ut+u-t}{t}$. Erit ergo indetermina-

ta-

tarum separatio expeditissima, si, sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{u-t}{t}$, ponaturque $y = z x^{r+1}$, idest $y = z x^{\frac{u}{t}}$. Et sane substitutionibus rite factis æquatio proposita vertetur in hanc

$$x^{\frac{ut+u}{t}} z^t dz + \frac{u}{t} z^{t+1} x^{\frac{ut+u-t}{t}} dx = c x^{\frac{ut+}{t}} dz$$

$$+ \frac{\overline{cu+et}}{t} z x^{\frac{ut+u-t}{t}} dx$$ quam si totam dividas per $x^{\frac{ut+u}{t}}$, habebis

$$z^t dz + \frac{u}{t} z^{t+1} x^{-1} dx = c dz + \frac{\overline{cu+et}}{t} z x^{-1} dx$$

unde

$$x^{-1} dx = \frac{dx}{x} = \frac{ctdz - tz^t dz}{uz^{t+1} + \overline{cu+et}\, z}.$$

Neque minus separabuntur inderminatæ per numerum $\frac{t-u}{u}$, qui elicitur ex secunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x. Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{t-u}{u}$, ponaturque $x = z y^{r+1}$, idest $x = z y^{\frac{t}{u}}$.

EXEMPLUM VIII.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$x^{\frac{4}{7}}dx + y^{\frac{4}{7}}dx + xy^{\frac{-3}{7}}dy = 0.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y^{\frac{4}{7}}dx. \qquad xy^{\frac{-3}{7}}dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur litteræ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m = \frac{4}{7}$, $p = 0$. $n = -\frac{3}{7}$. $q = 1$, atque ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicietur $\frac{0}{0}$. Igitur abjicio terminum $y^{\frac{4}{7}}dx$, & in ejus locum assumo $x^{\frac{4}{7}}dx$, ac mihi propono duos terminos

$$x^{\frac{4}{7}}dx. \qquad xy^{\frac{-3}{7}}dy.$$

in quibus cum sit $m = 0$. $p = \frac{4}{7}$. $n = -\frac{3}{7}$. $q = 1$; ex prima formula $\frac{n - m + q - p}{m - n - 1}$ elicio numerum o. Est autem numerus o utilis per y, quippe quia, si fiat $r = 0$, & in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e, exponens literæ y, & f summa exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re + f = \frac{4}{7}$, & pariter in quovis termino, habente dy, invenietur $re + r + f = \frac{4}{7}$. Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si, sumta ad voluntatem variabi-

bili quapiam z, fiat $r=0$, ponaturque $y=z\,x^{r+1}$, ideſt $y=z\,x$.

Si ſequi velis formulam ſecundam $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, elicies ex ea pariter numerum 0, qui erit utilis per x; ac facile indeterminatas ſeparabis, ponendo $x=z\,y$; quod quivis per ſe facile intelliget.

EXEMPLUM IX.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione

$$y^3\,x\,dx=y^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\,dx+x^{4+2\sqrt{5}}\,dy.$$

Seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, nempe

$$y^3\,x\,dx. \qquad x^{4+2\sqrt{5}}\,dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=3$. $p=1$. $n=0$. $q=4+2\sqrt{5}$; atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$, elicietur numerus $\sqrt{5}$. Eſt autem numerus $\sqrt{5}$ utilis per y; quippe quia, ſi fiat $r=\sqrt{5}$, & in ſingulis propoſitæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f ſumma exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=4+3\sqrt{5}$; & pariter in

quovis termino, habente dy, invenietur $re+r+f=4+3\sqrt{5}$. Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=\sqrt{5}$; ponaturque $y=zx^{r+1}$, idest $y=zx^{1+\sqrt{5}}$.

Et sane cum sit $y=zx^{1+\sqrt{5}}$, erit $y^3=z^3 x^{3+3\sqrt{5}}$, & $y^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}=z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} x^{4+3\sqrt{5}}$, & $dy=x^{1+\sqrt{5}}dz+\overline{1+\sqrt{5}}\,z\,x^{\sqrt{5}}dx$, & factis rite substitutionibus æquatio proposita vertetur in hanc

$$z^3\,x^{4+3\sqrt{5}}dx=z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\,x^{4+3\sqrt{5}}dx+x^{5+3\sqrt{5}}dz+\overline{1+\sqrt{5}}\,z\,x^{4+3\sqrt{5}}dx$$

quam si totam dividas per $x^{4+3\sqrt{5}}$, habebis

$$z^3dx=z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}dx+xdz+\overline{1+\sqrt{5}}\,zdz$$

unde

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{z^3-\overline{1+\sqrt{5}}\,z-z^{\frac{4+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}}.$$

Neque minus separabuntur indeterminatæ per numerum $\frac{-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, qui elicitur ex secunda formula

$n-m$

$\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x; etenim si fiat $r=\frac{-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$, & in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ x, & f summa exponentium literarum x, & y; jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re+f=\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$; & pariter in quovis termino, habente dx, invenietur $re+r+f=\frac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$. Erit igitur indeterminatarum separatio expeditissima, si, sumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r=\frac{-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$, ponaturque $x=zy^{r+1}$, idest $x=zy^{\frac{1}{1+\sqrt{5}}}$.

EXEMPLUM X.

Separare oporteat indeterminatas in æquatione:

$$y^3dy=\frac{2xdy-ydx}{xx}.$$

Hæc in institutionibus doctissimæ Agnesiæ occurrit, quamquam litera, quæ mihi est t, Agnesiæ est r. pos-

Possumus autem eamdem æquationem scribere in hunc modum

$$xxy^t dy = 2x dy - y dx.$$

Hunc scribendi modum sequens, seligo duos terminos, quorum alter habet dx, alter dy, puta

$$y dx. \qquad 2x dy.$$

Si in duobus his terminis determinentur literæ m, p, n, q, uti in primo exemplo; erit $m=1$. $p=0$. $n=0$. $q=1$, atque ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur $\frac{0}{0}$, species obscurissima. Igitur abjicio terminum, quem selegi, $2xdy$, & in ejus locum assumo $xxy^t dy$; ac mihi jam propono duos terminos

$$y dx. \qquad xxy^t dy.$$

in quibus cum sit $m=1$. $p=0$. $n=t$. $q=2$, ex prima formula $\frac{n-m+q-p}{m-n-1}$ elicietur numerus $\frac{-1-t}{t}$. Est autem numerus $\frac{-1-t}{t}$ utilis per y; quippe quia, si fiat $r=\frac{-1-t}{t}$, & in singulis propositæ æquationis terminis vocetur e exponens literæ y, & f summa exponentium literarum y, & x; jam in quovis termino, habente dx, invenietur $re+f=-\frac{1}{t}$, & pariter in quovis termino, ha-

ben-

bente dy invenietur $re + r + f = -\frac{1}{t}$. Erit igitur indeterminatarum feparatio expeditiffima, fi, fumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = \frac{-1-t}{t}$, ponaturque $y = z x^{r+1}$, ideft $y = z x^{\frac{-1}{t}}$. Et fane, factis rite fubftitutionibus, æquatio propofita vertetur in hanc $x^{\frac{t-1}{t}} z^t dz - \frac{1}{t} z^{t+1} x^{\frac{-1}{t}} dx = 2 x^{\frac{t-1}{t}} dz - \frac{\overline{2+t}}{t} z x^{\frac{-1}{t}} dx$ quam fi totam dividas per $x^{\frac{-1}{t}}$, habebis

$$x z^t dz - \frac{1}{t} z^{t+1} dx = 2 x dz - \frac{\overline{2+t}}{t} z dx$$

unde

$$\frac{dx}{x} = \frac{2 t dz - t z^t dz}{\overline{2+t}\, z - z^{t+1}}$$

Neque minus feparabuntur indeterminatæ per numerum $-1-t$, qui elicietur ex fecunda formula $\frac{n-m+q-p}{p-q+1}$, quique erit utilis per x. Etenim fi fiat $r = -1-t$, & in fingulis propofitæ æquationis terminis vocetur e exponens litteræ x, & fumma exponentium litterarum x, & y, jam in quovis termino, habente dy, invenietur $re + f = -t$; & pariter in quovis termino, habente dx, in-

invenietur $re + r + f = -t$. Erit igitur indeterminatarum ſeparatio expeditiſſima, ſi, ſumta ad voluntatem variabili quapiam z, fiat $r = -1 - t$, ponaturque $x = zy^{r+1}$, ideſt $x = zy^{-t}$, quod experiri longum non erit.

PRÆFATIO

In qua Anonymi animadversiones in Manfredii Ephemerides expenduntur.

LIbellum hunc, quem de præcipuis Manfredianarum Ephemeridum erroribus Anonymus nescio quis Venetiis edidit, iterum emittere constituimus; nam quamvis nos ex illo Sociorum numero non fuerimus, qui suam operam Manfredio ad Ephemerides illas condendas contulerunt, tamen quia postea societatem cum illis inivimus, aliasque Ephemerides simul cum Eustachio fratris nostri filio, & Francisco Vandello, & Josepho Roversio Manfredianarum exemplo condere, & futuros Planetarum cursus in duodecim sequentes annos persequi instituimus, e communi re facturum me esse existimavi, si librum hunc typis iterum committens Anonymum ipsum primum publice (qui enim privatim possem, qui illum ne de facie quidem noverim?) rogarem, tum pauca quædam amice & familiariter admonerem. Et sane Ephemerides novas edituri cur hominem non rogemus usque adeo accuratum & diligentem in aliorum erroribus colligendis, emendandisque? Nam cum in omnibus libris, tum vero maxime in Ephemeridibus, quæ totæ numeris, & supputationibus constat, illud

laborioſiſſimum eſt conficere quod in calce ſolet adjungi, *errata corrige*. Quod ſi uſquam occurrat, qui id laboris ſibi ſumere velit, næ illi maximæ habendæ ſunt gratiæ, quod id videlicet ſua ſponte ſuſcipiat, quod illi imponere, niſi mercede propoſita, nemo audeat. Quare Anonymum jam nunc rogamus, ut quando Ephemerides novas ſcribere ingreſſi ſumus, ubi eas typis commiſerimus, moleſtiſſimum illud *errata corrige* nobis conficiat, namque & ipſe in hujuſmodi operibus componendis multum valet, & nos quidem laborem ita refugimus, ut niſi quiſpiam occurrat, qui eum ſuſcipiat, videatur nobis aliquis vel pretio invitandus. Atque ex his utique itelligat Anonymus velim, ſe, quod Manfredianarum Ephemeridum errores collegerit, & publicos fecerit, non modo non moleſtam operam Manfredio, ejuſque ſociis præſtitiſſe, id quod vereri ſe valde (quæ ejus ſcilicet modeſtia eſt) in præfatione ait, ſed etiam jucundam. Nam niſi jucunda eſſet, neque ejus libellum iterum ederemus, neque ipſum hortaremur, ut alium talem in Ephemerides noſtras componeret, neque demum monendum putaremus, ut eſſet in his errorum catalogis deſcribendis in poſterum accuratior. Nam quamvis in hoc quem edidit, multa probemus, ſunt tamen alia, in quibus diligentiam modo, modo ingenium requiramus. Et ſane ubi Anonymus notam ℞ deſiderari interdum in Ephemeridibus Manfredianis animadvertit, quis ipſum non laudet? cum ex ipſis ſuſcriptis numeris plane conſtet

Pla-

Planetam esse retrogadum, cujus rei illa nota indicium est. Itemque ubi litteram h pro d adscriptam esse docet, iis præsertim in locis, in quibus designari digitos non horas, nemo est quin re ipsa admonitus satis intelligat, quis non probet? Illud vero præclarum: quod Manfredius scilicet conjunctionem Jovis cum Sole interdum notavit, cum esset potius Solis cum Jove notanda; nam quamvis hæc duo reciprocentur, ut alterum sine altero esse non possit, erat tamen Sol, ut qui nobilior est Jove (non enim hic poetas audire volumus) primo loco nominandus. Addit etiam Anonymus & in diebus cujusdam mensis numerandis inter diem 12, & diem 14. excidisse Manfredio diem 23 pro 13, & in paginarum numeris statim post 231 in numerum 332, mutato 2. in 3, Manfredium lapsum esse, & alia permulta hujus generis. Præclare. Probantur hæc nobis, & laudantur summopere; nam & ad *errata corrige* proprie pertinent, & nisi talia Anonymus collegisset, libellum hunc multo leviorem fecisset, suumque emendandi studium nimis angustis finibus terminasset. Quamquam hujusmodi errores persequens, poterat etiam vagari latius. Poterat enim & in mense Martio Anni 1727. animadvertere dominicalem litteram in facie dextera e suo loco deturbatam fuisse, & in subjectam lineam, ubi minime residere debebat, rejectam; & in mense Decembri Anni 1728 in sinistra facie, ubi mensis dies numerantur, numerum 14. cessisse loco, & extra lineam consedisse; itemque in Anno

1729. vigilium S. Jacobi, quod in die Sabbati consistere debuisset, in dominicum sequentem diem excurrisse. Quae omnia nobis, quasi aliud agentibus, animadversa Anonymum pervestigantem diligenter singula, quod sane fidem vix capit, praeterierunt. Quo minus causae erat, cur Manfredio, ejusque sociis succenseret, quod interdum nonnulla, judicio ejus, omiserint. Quamquam ne erat quidem, cur reprehenderet, si quid usquam in iis, quae notaverunt, per errorem lapsi sunt. Qui est enim liber usque adeo integer, ut mendis omnibus careat? At inquies, calculos subduxit Anonymus; errasse millies invenit. Errorum numerus non ferendus. An haec omnia erra-runt Manfredius, & socii? Nihil typographi? Nihil amanuenses? Atqui exemplaria sunt in manibus, supputationibus neque ullis erasis, neque, nisi perpaucis, inductis, eaque, si Deo placet, proferre possumus, quibus ostendamus, quam multa vel amanuensibus, vel typographo exciderint, contra quam a Manfredio, & Sociis scripta erant. Et vero errores huc spectant pene omnes, quos Anonymus adnotavit sive in longitudinibus, sive in latitudinibus, sive in declinationibus trajectionibusque Planetarum, iique praesertim, ubi numerorum ordo apertissime pervertitur, itemque illi, in quibus vel solidi unius gradus error inest, vel ex una hora in alteram excurritur minutis nullis interjectis, vel alterum Zodiaci signum pro altero ponitur, vel demum gradus longitudinis supra 30, tum declinationis Solis supra 23,
vel

vel denique horæ ſupra 24 numerantur. In quibus omnibus quis uſque adeo ſtupidus eſt, quin vel typographi, vel amanuenſis vitium agnoſcat? Quis etiam eſt, qui hiſce erroribus offendatur, qui ipſi ſtatim ſe produnt, Lectoremque admonent, ut emendet? Eſt autem emendandi ratio ex ipſa numerorum, vel ſignorum ſerie cuique paratiſſima. Neque vero dubitandum eſt, an Manfredii, & Sociorum autographa, quæ nos cuivis non invito libentiſſime proponemus, poſt ab iis exarata fuerint, quam Anonymi liber prodierit, & ex Anoniymi liber prodierit, & ex Anonymi reprehenſionibus emendata; nam neque laborem hunc tantum Anonymi cauſa ſuſcipere voluiſſent, ut paginarum millia exſcriberent, neque ſi voluiſſent, potuiſſent: quippe illorum unus, ideſt Veberus, jamdudum in Hiſpaniam profectus eſt, duo, ideſt Nadius, & Banderius, deceſſerunt. Sed quid ego hæc? Fac millies in Manfredianis Ephemeridibus erratum eſſe; idque eſſe Manfredio, ejuſque Sociis culpæ vertendum. Nihil peccaverint amanuenſes. Nihil typographus. Illa ipſa autographa, quæ ſupra memoravimus, nulla ſint. Quo in libro tandem, quotue in chartis hæc erraverunt? in quinquaginta? In centum? turpe eſſet tam multa erraſſe in tam paucis. Ne in trecentis quidem ignoſcerem. At vero cum illa erraverint in tomis tribus grandioribus, quartam folii partem amplitudine æquantibus, paginas ſupra mille complexis, quid eſt demum, cur illos Anonymus uſque adeo in-

insectetur, ut clamores tollat, ac cum typographis, & amanuensibus tacite veniam dederit, *quæ correctorum excusatio sit*, quærat? Quæ excusatio? Nempe eadem, quæ Anonymi. Cur enim Manfredio & Sociis in paginis grandioribus supra mille errare millies non licuerit, cum Anonymo in pagellis ipsis quadraginta quinque licuerit nonagies? Nonagies vero? Immo multo plus. Nam nonagies cum dico, ommissiones Anonymi missas facio; quas ille in Manfredianis erroribus colligendis non prætermisit. Ac ne id temere videamur dicere, & sine causa, catalogum errorum, quos admisit Anonymus, in fine hujus libri proponemus; qui errores apparebunt etiam hoc ipso in libro; nam hanc editionem ex illa Moræ Veneta, quoad ejus fieri potuit, accuratissime exprimi jussimus, & plane ad verbum. Neque vero typographiæ vitio omnes dandi sunt; sunt enim non pauci, in quibus ratio & judicium apparet certissimum, ut non typographi incuria, sed auctoris sollertia accusanda sit ingeniosi & docti ad errandum. Quod si Anonymus in libello tantulo, quantulus iste est, errores ferre potuit amplius nonaginta, quid est cur pauciores ferre non possit in tomis Manfredii tribus grandioribus? Pauciores, inquam, nam si proportione utimur cujus sane ratio aliqua habenda est, quid est tandem mille errorum in magnis paginis plusquam mille ad errores plusquam nonaginta in pagellis quadraginta quinque? Quam proportionem si errando Manfredius secutus esset, næ illi errores admittere licuis-

licuiſſet, quotquot voluiſſet; quæ eſt enim uſquam tanta errorum copia, quam lenis iſta, & liberalis proportio non excuſet? Vereor, ne Anonymum videar reprehendere. Sed monendi ſtudio, & quaſi re ipſa ducti neſcio quomodo ad ejus errores delapſi ſumus. Itaque hos mittamus. Cetera, quæ ſecuntur, & brevius dicamus, & ſi fieri poteſt, lenius; monere enim volumus, non reprehendere. Quamquam non illud ſane monebo, quod tamen veriſſimum eſt, turpe eſſe eum, qui reprehendat, reprehenſionis cauſam afferre nullam: nam quamvis Anonymus & plagii Manfredium inſimulaverit, quod numeros quoſdam ex aliorum Ephemeridibus exſcripſerit; & præterea id neget, quod Manfredius affirmaverat, ſupputationes in Marte, Venere, & Mercurio modo in quinos, modo in binos dies, modo etiam in ſingulos ex tabulis fuiſſe iteratas; & inſuper Manfredianos calculos in Mercurio præcipue improbet, quod ex aliis numeris ad alios progredientes intermedios haud paucos celeritate non ferenda tranſiliverint; neque harum accuſationum cauſam omnino ullam afferat; ſi id tamen monerem, viderer fortaſſe, inſtare vehementius, & reprehendere. Nam certe in hac poſtrema citanda erant loca aliqua, quæ ipſe nulla citavit: duas vero alias nulla ratione probare poterat; habemus enim autographa in manibus, ut ex ſupputationibus ipſis appareat, & quotum quemque in diem initæ ex tabulis fuerint, neque ullos numeros ex aliorum Ephemeridibus fuiſſe depromtos.

Sed

Sed amice agamus, & aliquid, si possumus, aliquando concedamus. Concedimus ergo Manfredium, cum Planetarum motus ad calculos modo in quintum, modo in decimum quemque diem ex tabulis revocasset, numerosque intermedios in dies singulos distribuisset, idque plusquam novies millies fecisset (non enim pauciores distributiones anni ipsi triginta sex, ad quos Ephemerides suas produxit, ferebant) in locis lapsum esse novemdecim. Quid vultis amplius? Id ipse concedit Manfredius, se, cum novies supputationum millia, eoque amplius, rectissime iniverit, in novemdecim offendisse. Cur enim id non concedat se admisisse, quod reprehendere turpius sit, quam confiteri? Et quoniam aliquid concedere Anonymo instituimus, demus etiam, si vult, Planetarum adspectus, atque ipsas, si Deo placet, Lunæ phases in Manfredianis Ephemeridibus haud raro perperam, quemadmodum Anonymus animadvertit, notatas esse; neque usquam culpam in typographum conferamus; Manfredium & Socios, quod verissimum est, diligentes minus in hisce adspectibus & phasibus persequendis se præstitisse, quam in aliis partibus, confiteamur. Cur enim de his admodum laborarent, quæ usque adeo futilia sunt, ut nemo Astronomorum unus ea curet, quæque Manfredius bibliopolæ tantum causa Ephemeridibus adjunxit suis, veriti scilicet, ne si Lunæ præsertim phases desiderarentur, minus multi ad librum emendum accederent. Audiverat enim hæc & Frugnolo, & Sabbadono, & Rosaccio, aliisque

hu-

hujus generis ſcriptoribus probari vehementer. Itaque tantum curæ & laboris in his ponendum eſſe cenſuit, quantum vel Sabbadono vel Roſaccio ſatis eſſet; qui ſi illos Planetarum adſpectus, Lunæque phaſes requirunt; ut futura hominum eventa prænuncient, & quod cuique impendeat fatum ex nataliciis ſideribus doceant, nihil ſane refert, utrum phaſes illæ & adſpectus, quos notaverint, cum veritate ipſa plane congruant, an hora aberrent una aut altera. Utrum enim putamus veriora prædicturum: eum, qui ex certiſſimis Planetarum adſpectibus futura præcinat, an eum, qui ex dubiis, vel etiam ex fictis? Quod ſi qui dubitant, ii nulla ratione convincendi ſunt: rogandi potius, ut experimentum ſumant. Nobis ergo non modo non reprehendendus, ſed etiam commendandus videtur Manfredius, quod in hac parte diligentiam tantam poſuerit, quantam res ipſa, atque uſus poſtulabant, laborem pene omnem & curam ad ea tranſtulit, in quibus erat aliqua Aſtronomorum exſpectatio: puta ad Lunæ tranſitus per meridianum circulum in ſingulos dies ita conſtituendos, ut nunquam minuto integro aberrent: puta ad declinationes Lunæ, trajectioneſque Planetarum: puta ad appulſus Planetarum cum ſe ad invicem, tum ad ſtellam quamque primariam: puta ad Lunæ cum Planetis conjunctiones: puta ad Eclipſes in geographicis Tabulis per lineas curvas cum horarias, tum digitales, atque horizontales repræſentandas: quæ omnia ſi nullo negotio aut labore confici poſſe Anonymus pu-

putat, ut mirari Manfredium videatur, qui Socios in partem operis advocaverit, quin ergo ipse manum operi admovet? Quin hujusmodi supputationes nobis expedit in alios viginti quinque annos? Adjungat etiam adspectus & phases illas suas. Næ ille magnam ab Astronomis, atque adeo a nobis ipsis inibit gratiam, si hæc & solus præstiterit, & recte, & celeriter. Neque hæc tamen sic dico, quasi Anonymus non illa indicare in suo libro debuisset, quæ sunt a Manfredii sociis in Lunæ phasibus, & Planetarum adspectibus minus diligenter notata. Id enim ad illud, quod præclare instituerat, *errata corrige* absolvendum requirebatur. Erat etiam Sabbadono consulendum. Sed sunt alia, quæ ad id minus pertinent, quibusque mallem Anonymus abstinuisset. Quis enim hominem ferat quærentem, cur Planetarum transitus per meridianum circulum, & declinationes in Ephemeridibus notentur, vel improbantem Bayeri notas ad stellam quamque fixam designandam, vel mirantem denique quod in primo Manfredianarum Ephemeridum tomo desit tabula, e qua Planetarum, quorum utique latitudo est aliqua, declinationes eliciantur? Ego vero nihil miror, hominem in perquirendis erroribus attentissimum perfectissimam, absolutissimamque tabulam non invenisse. Quid vero ubi motum lunaris nodi, quem ipse *medium* vocat, quemque in Ephemeridibus Manfredius notaverat, reprehendit? quasi vero Astronomi nulli sint, quorum opinione ejus motus inæqualitates usque adeo sunt exi-

guæ,

guæ, ut nisi longo intervallo sub sensum cadere nequeant. Quid cum admiratione afficitur, quod in Saturni motibus corrigendis minutorum ratio sit habita non amplius octo, cum interdum aberrasse hunc planetam compertum sit minuta ad viginti? hoc est quidem in Astronomia hospitem plane esse. Et is rogat lectores, ut si quando Manfredianas Ephemerides perlegerint, risum teneant? Quid est vero cur rideant? Nempe quod cujusque Eclipseos supputationem, quo certior esset, tribus se modis inivisse Manfredius profitetur, Eclipticis primum tabulis, tum schemate, deinde ratione trigonometrica. Quid est, obsecro, quod hic loci lectores rideant, nisi si Anonymi recordentur? Sed veniamus ad id, quod caput est, & summam habet. Primum Manfredianæ Ephemerides cum planetarum motibus non consentiunt: deinde Ephemerides aliæ extant multo emendatiores, quas Astronomi utilius consulant. De hoc infra differemus. Sed illud primum quibus tandem persuadere conatur Anonymus? Nam nobis quidem non potest, qui tres abhinc annos eoque amplius telescopio ad muralem semicirculum adhærente tum omnes simul, tum terni, tum bini planetas in meridiano ipso circulo vel interdiu captantes, plane percepimus, atque oculis ipsi nostris vidimus tantam esse inter planetæ cujusque motum & Manfredianas Ephemerides consensionem, quanta potest ab non iniquis æstimatoribus postulari. Quis enim umquam planeta in meridiano extitit non eo tempore, quod Manfredius indicaverat,

eaque altitudine, quæ ex declinationibus in ejus Ephemeridibus notatis colligebatur? si modo duorum triumve minutorum differentiam interdum negligas, quam differentiam in re usque adeo subtili Astronomus quisque peritissimus parui faciet, eoque libentius Manfredio ignoscet, quod sæpissime ne unum quidem minutum a veritate aberraverit. Quid quod sæpe differentiam citra dimidium minutorum consistere compertum est? cujus rei testimonia afferre possem & nostra, & Josephi Bolsii Marchesii hominis diligentissimi, & Jacobi Parmæ harum rerum studiosissimi, & ejus demum, qui pro illa, quæ sibi cum his intercedit amicitia, ad instituti speculam novissime accessit, Francisci Algarotti adolescentis optimi, & omni laudum genere ornatissimi, quorum cum alii calculos subducerent, alii ad observationem se conferrent, tanta sæpe extitit inter utrosque consensio, ut admirabilitatem habere quamdam videretur. Sed quid testimonia proferamus, ubi & concedere, quod Anonymus vult, possumus, & Manfredium tueri nihilominus? Non consentiunt Manfredianæ Ephemerides cum Planetarum cursu? non consentiant. Quid tum? Num illæ idcirco reprehendendæ? Quid si etiam non minus probandæ, quam si præclare, si egregie, si plane consentirent. Quis enim ignorat, non eam propriе Ephemeridum laudem esse, ut plane cum veritate consentiant, sed potius tabularum, unde illæ ductæ fuerunt? Nam quamvis jucundum sit futuros planetarum cursus vere prædicere, nihilominus

qui

qui Ephemerides condunt, cum prædictiones suas ex his vel illis astronomorum tabulis numquam non colligant, supputandi diligentiam præstare debent, veritatem non debent; potest enim in tabulis insedisse error, quem nisi Ephemeridibus confectis comparatisque diligenter cum observationibus non agnoscas. Eamque ob causam valde optandum est, ut cum aliæ tabulæ ab aliis confectæ fuerint, Ephemerides alias ex aliis conscribant quam plurimi; sic enim si cum reipsa, & veritate conferantur, tum denique apparebit quæ tabulæ utiliores sint, magisque ad verum accedentes. Qua propter Manfredius, nosque ipsi Antonium Ghislerium Virum Nobilissimum, Episcopum Azothensem summis laudibus efferre solemus, qui cum Juris Legumque scientia, quam in Publico Bononiensi Archigymnasio multos annos professus est, in primis floreat, idemque Poeta sit probatissimus, ad cæteras laudes illud etiam adjunxit, quod Ephemerides in multos annos emisit ex aliorum tabulis conditas eodem pene tempore, quo suas Manfredius conficiebat e Cassinianis. Cujus rei causa literati homines numquam ei plurimum non debebunt. Quod vero ait Anonymus Ephemerides alias esse emendatiores multo quam Manfredianas; quas ille emendatiores vocet, nescimus. Sed si illas intelligit, quas nos non utique emendatiores, sed emendatissimas dicere solemus, propterea quod Typographo permulta tribuimus, non sane videmus cur sint Manfredianis anteponendæ. Quippe qui Anonymi libro accepto illas

las ſtatim in manus ſumſimus, in eumque, qui tum exibat, Novembrem menſem quaſi per otium inquiſivimus. Quid putatis? in ipſis triginta diebus errores invenimus, quos quidem in Typographos partim, partim in Amanuenſes reiicimus, quadragintaquinque; quot ſcilicet in binis quidem, ternisve annis vertentibus in Manfredianis inveneris. Ac ne id per exaggerationem quamdam videamur dicere, ipſos ſtatim errores ſubjiciemus.

. . . .

Viden' quam multa ſint unius menſis flagitia? Et ſunt, qui putant Ephemerides ullas edi poſſe typographo nuſquam peccante? quid quod idem menſis in Venere ſemper labitur, nam latitudines ubique Heliocentricas pro Geocentricis indicat; qui error non hoc uno in menſe inſidet, ſed manavit ad multos. Verum alios mittamus; hujus certe hi ſunt lapſus.

. . . .

An poterat major eſſe inter unum hunc menſem Veneremque diſſenſio? Quis enim eſt dies, quo oriri Venus & progredi Cœlo poſſit, quin ſit illi cum hujus menſis ſupputationibus vel de gradu vel de minutis aliquot diſceptandum? At melior fortaſſe erit hic menſis in Mercurio. Immo vero longe vitioſior. Quæ eſt enim longitudinum diſtributio non perverſiſſima?

. . . .

Quis Planetam agnoſcat in tanta longitudinum per-

perversitate? Quæ omnia quamvis Typographis vel Amanuensibus vitio vertimus, nihil est tamen cur Ephemerides istas, quibus tantæ cum Planetis duobus nobilissimis rixæ sunt, meliores esse putemus, quam Manfredianas. Illud postremo Anonymus monendus est, ut quando errores quosdam in eo libro animadvertisse se prædicat, quem superiore anno Manfredius edidit *de Annuis inerrantium Stellarum aberrationibus*, quos errores summi, nobilissimique Viri caussa, cui librum illum Manfredius consecraverat, notare se nolle significavit; ne hanc ob rem se contineat, sed errores omnes illius libri, & colligat & indicet & coarguat; quamvis enim Vir ille summus librum sibi dicatum fuisse putet, errores tamen non putat. Laborem hunc ergo ut suscipiat, Anonymum etiam atque etiam rogamus. Nihil gratius facere poterit.

FINIS.

Vidit D. Philippus Maria Toselli Clericus Regularis S. Paulli, & in Ecclesia Metropolitana Bononiæ Pœnitentiarius pro Eminentissimo, & Reverendissimo Domino Domino Andrea Cardinali Joannetto Ordinis Sancti Benedicti Congregationis Camaldulensis, Archiepiscopo Bononiæ, & S. R. I. Principe.

Die 6. Januarii 1780.

IMPRIMATUR.

Fr. Aloysius Maria Ceruti Vicarius Generalis Sancti Officii Bononiæ.



